Mejorar con matemáticas el día a día

"La teoría y la práctica se unen para mejorar, día a día, nuestro entorno y nuestra calidad de vida."

Sergio Anglada, Herminia I. Calvete, Carmen Galé, Aitor Hernández y José A. Iranzo

envato

pixabay

DESCUBRIENDO LA INVESTIGACIÓN OPERATIVA

La Investigación Operativa (IO) es una disciplina relativamente joven dentro del campo de las matemáticas. Según la organización IFORS (The International Federation of Operational Research Societies), **la IO es una disciplina científica orientada a mejorar la toma de decisiones mediante un enfoque analítico**. Las técnicas de IO implican la construcción de modelos matemáticos que buscan describir y entender un problema. (Galé, 2017; Hillier & Lieberman, 2021; Winston, 2004)

Para algunos autores, el padre de la IO es el matemático Charles Babbage que a mediados del siglo XIX estudió problemas relacionados con el coste de transporte y clasificación del correo en el sistema postal del Reino Unido. Babbage sugirió la implantación de un sistema de franqueo uniforme que fuera independiente de la distancia que recorriese la carta. La decisión de cobrar una tasa uniforme, *Uniform Penny Post* (1840), basada en el análisis detallado de los costes, fue una componente esencial en la amplia reforma del sistema postal del Reino Unido del siglo XIX.

No obstante, su origen como disciplina formal es más reciente, ya que se remonta a la Segunda Guerra Mundial, cuando la escasez de recursos hizo necesaria una gestión eficiente de los mismos mediante el uso del método científico. Las administraciones británica y estadounidense solicitaron a un equipo de científicos procedentes de distintas áreas de conocimiento que estudiaran un conjunto de problemas estratégicos y tácticos relacionados con la mejora de la efectividad de las operaciones militares; es decir, que llevaran a cabo una "investigación de operaciones militares". De ahí proviene su peculiar nombre. Después de la guerra, las técnicas desarrolladas se aplicaron a problemas civiles y se construyó un cuerpo teórico en torno a ellas. Además, el progreso en el desarrollo de los ordenadores facilitó su aplicación a problemas cada vez más complejos y de mayor tamaño. Desde los años 50 del siglo pasado, la IO ha experimentado un gran avance y se considera una disciplina independiente dentro de las matemáticas.

Si bien podríamos seguir explorando el origen histórico de la IO, nos parece más relevante destacar la importancia de aplicar sus métodos para proponer estrategias que mejoran el funcionamiento de las organizaciones tanto públicas como privadas en la actualidad. A través de algunos ejemplos de problemas en diversos sectores, se puede observar cómo la IO contribuye significativamente en el proceso de toma de decisiones. En logística y transporte, los modelos de rutas de vehículos optimizan la gestión de flotas de camiones, minimizando costes y tiempos de entrega. En el ámbito sanitario, los modelos de asignación de turnos son fundamentales para planificar la cobertura del personal médico, respetando normativas laborales, especialidades y preferencias individuales. En los almacenes, los modelos de gestión de inventarios ayudan a determinar en qué momento y en qué cantidad adquirir productos, asegurando así la disponibilidad frente a la demanda de los clientes y reduciendo los costes de almacenamiento. Así podríamos seguir, pero para mostrar un ejemplo más cercano, nos centraremos en la Facultad de Ciencias, específicamente en las conserjerías de los edificios de Matemáticas y Geológicas, como comúnmente se les conoce, y en un problema de organización de turnos. Sin embargo, antes de abordar formalmente este problema, comencemos por lo esencial: los pasos necesarios para construir un modelo matemático de optimización.

"En logística y transporte, los modelos de rutas de vehículos optimizan la gestión de flotas de camiones, minimizando costes y tiempos de entrega."

pixabay

OPTIMIZAR, UNA ASPIRACIÓN HUMANA

En la ejecución de muchas actividades, tanto del ámbito personal como profesional**, optimizar significa buscar la mejor manera de realizar una actividad**. Es indiscutible que se trata de una necesidad transversal y multidisciplinar. Basta fijarse en nuestras conversaciones para escuchar palabras como *eficaz*, *eficiente*, *planificar*, *organizar*, y expresiones como *con el coste mínimo* o *con el mayor rendimiento*.

En la definición anterior, incluso en el título de este artículo, se emplea la palabra *mejor*. Si nos paramos a pensar, ¿qué es lo mejor? La respuesta es: depende de cuál sea el objetivo. Veamos un ejemplo.

Deseamos ir desde Pamplona hasta Alcañiz y solicitamos a la aplicación del móvil que nos proponga una ruta. En general, obtenemos más de una, por ejemplo, la más rápida, la más corta, en la que menos combustible se consume o la que tiene un menor número de curvas. Incluso podemos señalar en la aplicación a qué hora queremos llegar a Alcañiz o si deseamos evitar peajes. De este modo, la aplicación tendrá en cuenta el tráfico o la posibilidad de utilizar autopistas o no, para ofrecernos una lista de rutas. Es importante tener en cuenta que, para que la aplicación pueda facilitar esa información, necesita identificar internamente las rutas posibles y evaluarlas, de modo que muestre la que mejor responde a las necesidades del usuario. En general, este proceso implica, durante el diseño de la aplicación, proponer uno o varios modelos matemáticos del problema y desarrollar procedimientos (algoritmos) para resolverlos. Casi sin proponérnoslo, en la descripción anterior han aparecido los elementos esenciales de un modelo matemático de optimización para la toma de decisiones.

DE LO REAL A LO ABSTRACTO: CLAVES PARA CONSTRUIR UN MODELO MATEMÁTICO DE OPTIMIZACIÓN

Antes de formular un modelo de optimización matemática, hay que tener claro sobre qué queremos decidir, es decir, qué pregunta queremos responder. Desde el punto de vista matemático, esto significa definir un conjunto de **variables de decisión**. Estas variables contienen la información necesaria para describir de manera precisa la solución o las soluciones obtenidas al resolver el modelo. En nuestro ejemplo, estas variables contienen información acerca de qué carreteras y qué desvíos debemos tomar para ir desde nuestro punto de origen, Pamplona, hasta nuestro punto de destino, Alcañiz.

Una vez definidas las variables de decisión del problema, el siguiente paso es establecer qué soluciones son viables para el problema. Lo que determina la validez de una solución son los requisitos específicos del problema, o lo que técnicamente se conoce como **restricciones** del problema. Volvamos a nuestro ejemplo de seleccionar una ruta para ir desde Pamplona hasta Alcañiz. Algunas restricciones típicas en un problema de elección de rutas incluyen el límite de tiempo de viaje, evitar peajes, evitar determinadas zonas o llegar a una hora establecida. En el lenguaje matemático, las soluciones válidas para un problema de optimización —aquellas que cumplen todas las restricciones— se denominan soluciones factibles. Si no existen valores de las variables que verifiquen todas las restricciones del problema, se dice que el problema es no factible. Por ejemplo, en nuestro caso, si las restricciones fueran un límite de tiempo de viaje de tres horas o menos y evitar peajes, el problema sería no factible, ya que no existen rutas sin peajes cuya duración sea igual o inferior a tres horas.

pixabay

Para finalizar la formulación de un modelo de optimización matemática, es necesario establecer un criterio que permita evaluar y comparar las diferentes soluciones factibles. A este criterio se le denomina **función objetivo**, y puede ser maximizado o minimizado. Si en nuestro ejemplo buscamos la ruta más corta, el criterio a minimizar sería la distancia total recorrida.

Para ilustrar de manera más detallada el proceso de construcción de un modelo, vamos a presentar a continuación el problema que motivó la escritura de este artículo.

Imagen cedida por los autores.

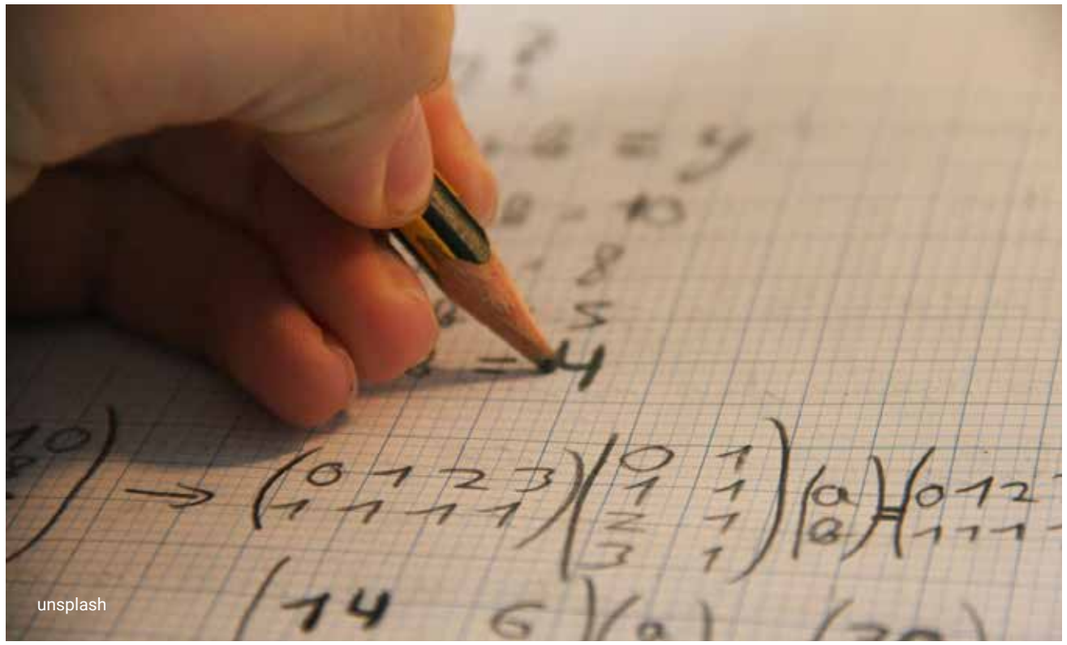
Figura 1. Los trabajadores en la conserjería del edificio de Matemáticas.

Las conserjerías de los edificios de Matemáticas y Geológicas están atendidas por un equipo de seis personas. La figura 1 muestra una fotografía de la conserjería de Matemáticas con los trabajadores de ambos edificios.

Al inicio del periodo lectivo, contactaron con nosotros para saber si existía algún procedimiento que facilitara la asignación de los turnos de trabajo de manera automática, ya que hacerlo manualmente resultaba complicado debido a todas las condiciones que deseaban incluir. En general, **la planificación de horarios de personal es una necesidad común en la mayoría de las grandes organizaciones, tanto privadas como públicas**. En el ámbito académico, existe abundante literatura sobre el problema de planificación de turnos de trabajo, y en el mercado se pueden encontrar algunas herramientas informáticas que facilitan esta tarea. Sin embargo, el objetivo en este caso era desarrollar un modelo de optimización específico para el problema particular del personal de estas conserjerías.

EL RETO DE ORGANIZAR TURNOS DE TRABAJO

El primer paso fue definir el problema con precisión, para lo cual fue necesario que los propios trabajadores nos proporcionaran una descripción detallada de la situación. El equipo de conserjería indicó que hay seis trabajadores, conserjerías en dos edificios, y dos turnos semanales, uno de mañana y otro de tarde.


unsplash

Inicialmente, les propusimos realizar la planificación para las 15 semanas lectivas de un cuatrimestre. Si los trabajadores estaban satisfechos con los resultados, el modelo podría extenderse para abarcar el periodo que consideraran oportuno. Por tanto, comenzamos definiendo los conjuntos necesarios para formular el modelo de optimización:

- El conjunto de trabajadores, $I = \{1,2,\ldots,6\}$
- El conjunto de edificios, $E = \{e_1 = \text{matemáticas}, e_2 = \text{geológicas}\}$
- El conjunto de tipos de turno, $K = \{k_1 = \text{mañana}, k_2 = \text{tarde}\}$
- El conjunto de las semanas para la planificación, $T = \{1,2,\ldots,15\}$.

Además, ya sabíamos qué pregunta debíamos contestar: ¿en qué edificio y en qué turno debe trabajar cada uno de los trabajadores cada semana? Las variables de decisión estaban claras, faltaba definirlas formalmente. Sea *i* el índice que representa un trabajador, *e* el índice que representa un edificio, *k* el índice que representa un tipo de turno y *t* el índice que representa una semana. Estos índices toman valores en los conjuntos *I, E, K* y *T*, respectivamente. Definimos las variables de decisión x_{ie}^{kt} de forma que toman valor 1 si al trabajador *i* se le asigna el edificio *e* con un tipo de turno *k* en la semana *t*, y toman valor 0 en caso contrario.

Además, los trabajadores establecieron las siguientes condiciones que debían ser tenidas en cuenta a la hora de preparar la planificación:

- Cada trabajador tiene asignado cada semana un edificio (Matemáticas o Geológicas) y un tipo de turno (de mañana o de tarde).
- Ningún trabajador puede repetir en el mismo edificio más de tres semanas seguidas.
- Si un trabajador tiene turno de tarde una semana, obligatoriamente tiene turno de mañana en las dos semanas siguientes y en la tercera semana volverá a ir de tarde, pero en el otro edificio.
- En cada conserjería, debe haber dos personas trabajando en el turno de mañana y una persona en el turno de tarde.

Por último, los trabajadores de las conserjerías estaban interesados en la rotación de las parejas de trabajo durante los turnos de mañana. Preferían que las parejas no fuesen fijas, sino que, en la medida de lo posible, cada trabajador coincidiera con todos sus compañeros en algún momento y, preferiblemente, que coincidiera el mismo número de veces con cada uno de ellos. Incluir como restricción que cada trabajador coincida con cada uno de sus compañeros exactamente el mismo número de veces podría suponer que el problema no tuviera ninguna solución factible. Por tanto, la función que cuenta el número máximo de veces que las parejas de trabajadores coinciden en un edificio en turno de mañana resultó ser una buena candidata a función objetivo.

Para conseguir que las parejas de trabajo fuesen lo más variadas posible había que minimizar esta función. Para escribir matemáticamente esta función objetivo se necesita definir nuevas variables de decisión que permitan contar cuántas veces coincide cada pareja de trabajadores en un edificio. Por tanto, definimos las variables de decisión $y_{(ij),e}^{t}$ que toman valor 1 si los trabajadores *i* y *j* coinciden en el turno de mañana en el edificio *e* en la semana t, y toman valor 0 en caso contrario.

En este artículo no profundizaremos en la construcción matemática de la función objetivo y las restricciones. Para aquellos lectores interesados, la figura 2 presenta la formulación matemática del modelo.

Figura 2. Formulación inicial del modelo matemático.

$$\underset{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}{\text{minimizar}} \quad \underset{\substack{i,j\in I\\ j\neq i}}{\text{máximo}} \left\{ \sum_{e\in E}\sum_{t\in T} y_{(ij)e}^{t} \right\}$$

sujeto a:

$$\sum_{e\in E}\sum_{k\in K} x_{ie}^{kt} = 1 \qquad i\in I \quad t\in T$$

$$\sum_{i\in I} x_{ie}^{k_1 t} = 2 \qquad e\in E \quad t\in T$$

$$\sum_{i\in I} x_{ie}^{k_2 t} = 1 \qquad e\in E \quad t\in T$$

$$\sum_{k\in K}\left(x_{ie}^{kt} + x_{ie}^{k(t+1)} + x_{ie}^{k(t+2)} + x_{ie}^{k(t+3)}\right) \leqslant 3 \qquad i\in I \quad e\in E \quad t\in T$$

$$\sum_{e\in E} x_{ie}^{k_2 t} + 1 \leqslant \sum_{e\in E}\left(x_{ie}^{k_1(t+1)} + x_{ie}^{k_1(t+2)}\right) \qquad t\in T \quad i\in I$$

$$x_{ie_1}^{k_2 t} = x_{ie_2}^{k_2(t+3)} \qquad t\in T \quad i\in I$$

$$x_{ie_2}^{k_2 t} = x_{ie_1}^{k_2(t+3)} \qquad t\in T \quad i\in I$$

$$y_{(ij)e}^{t} \leqslant x_{ie}^{k_1 t} \qquad e\in E \quad t\in T \quad i,j\in I \text{ con } j\neq i$$

$$y_{(ij)e}^{t} \leqslant x_{je}^{k_1 t} \qquad e\in E \quad t\in T \quad i,j\in I \text{ con } j\neq i$$

$$y_{(ij)e}^{t} \geqslant x_{ie}^{k_1 t} + x_{je}^{k_1 t} - 1 \qquad e\in E \quad t\in T \quad i,j\in I \text{ con } j\neq i$$

$$x_{ie}^{kt} \in \{0,1\} \qquad e\in E \quad t\in T \quad k\in K \quad i\in I$$

$$y_{(ij)e}^{t} \in \{0,1\} \qquad e\in E \quad t\in T \quad i,j\in I \text{ con } j\neq i$$

Con las capacidades de cómputo disponibles hoy en día, tras algunas transformaciones necesarias, este modelo puede resolverse de manera exacta utilizando software especializado en un ordenador de sobremesa estándar. La figura 3 muestra un extracto del código escrito para su resolución. Conviene destacar sin embargo que, para problemas de optimización más grandes o complejos, la resolución exacta puede requerir un tiempo computacional considerable,

“Las variables de decisión estaban claras, faltaba definirlas formalmente.”

Figura 3. Extracto del código con el que se ha resuelto el modelo de optimización.

```
nI = 6
nE = 2
nK = 2
nT = 15
I = [i for i in range(nI)]
E = [e for e in range(nE)]
K = [k for k in range(nK)]
T = [t for t in range(nT)]

model = gp.Model()

x = model.addVars(nI, nE, nK, nT, vtype = GRB.BINARY, name = "x")
y = model.addVars(nI, nI, nE, nT, vtype = GRB.BINARY, name = "y")
z = model.addVar(vtype = GRB.CONTINUOUS, name = "z")
model.update()

model.addConstrs(
    gp.quicksum(x[i, e, k, t] for e in E for k in K) == 1
    for i in I for t in T
)
model.addConstrs(
    gp.quicksum(x[i, e, 0, t] for i in I) == 2 )
    for e in E for t in T
)
model.addConstrs(
    gp.quicksum(x[i, e, 1, t] for i in I) == 1 )
    for e in E for t in T
)
model.addConstrs(
    gp.quicksum(x[i, e, k, t] + x[i, e, k, t + 1] + x[i, e, k, t + 2] + x[i, e, k, t + 3] for k in K) <= 3
    for i in I for e in E for t in T[:-3]
)
model.addConstrs(
    gp.quicksum(x[i, e, 1, t] for e in E) + 1 <= gp.quicksum(x[i, e, 0, t + 1] + x[i, e, 0, t + 2] for e in E)
    for i in E for t in T[:-2]
)
model.addConstrs(
    x[i, 0, 1, t] == x[i, 1, 1, t + 3]
    for i in I for t in T[:-3]
)
model.addConstrs(
    x[i, 1, 1, t] == x[i, 0, 1, t + 3]
    for i in I for t in T[:-3]
)
model.addConstrs(
    y[i, j, e, t] <= x[i, e, 0, t]
    for i in I for j in I for e in E for t in T if i != j
)
model.addConstrs(
    y[i, j, e, t] <= x[j, e, 0, t]
    for i in I for j in I for e in E for t in T if i != j
)
model.addConstrs(
    y[i, j, e, t] >= x[i, e, 0, t] + x[j, e, 0, t] - 1
    for i in I for j in I for e in E for t in T if i != j
)
model.addConstrs(
    gp.quicksum(y[i, j, e, t] for e in E for t in T) <= z
    for i in I for j in I if i != j
)
model.update()

model.setObjective(z, sense = GRB.MINIMIZE)
model.optimize()
```

unsplash

“La función que cuenta el número máximo de veces que las parejas de trabajadores coinciden en un edificio en turno de mañana resultó ser una buena candidata a función objetivo.”

lo que hace necesario diseñar procedimientos que permitan obtener soluciones ‘buenas’ en un tiempo reducido. Pero esa es una historia para otro artículo.

La solución que proporcionamos al equipo de conserjería cumplió con sus expectativas, pero ocurrió algo que es bastante común en nuestra área: cuando las personas que enfrentan el problema reciben una solución, siempre emergen nuevos aspectos que podrían incorporarse al modelo.

En este caso, tras analizar la solución, se consideró interesante equilibrar el número de semanas que cada trabajador permanece en un edificio, es decir, que la cantidad de veces que cada persona está asignada a cada edificio sea más o menos uniforme. Para lograrlo, fue necesario realizar nuevos ajustes en el modelo, en los que no vamos a profundizar, como definir nuevas variables de decisión e introducir restricciones adicionales. La figura 4 muestra la planificación de 15 semanas que finalmente se les entregó y con la que, según nos informaron, quedaron satisfechos.

Semana 1

	Matemáticas		Geológicas	
Mañana	1	5	3	4
Tarde	2		6	

Semana 2

	Matemáticas		Geológicas	
Mañana	3	6	2	5
Tarde	4		1	

Semana 3

	Matemáticas		Geológicas	
Mañana	1	6	2	4
Tarde	3		5	

Semana 4

	Matemáticas		Geológicas	
Mañana	4	5	1	3
Tarde	6		2	

Semana 5

	Matemáticas		Geológicas	
Mañana	2	3	5	6
Tarde	1		4	

Semana 6

	Matemáticas		Geológicas	
Mañana	1	6	2	4
Tarde	5		3	

Semana 7

	Matemáticas		Geológicas	
Mañana	1	4	3	5
Tarde	2		6	

Semana 8

	Matemáticas		Geológicas	
Mañana	2	3	5	6
Tarde	4		1	

Semana 9

	Matemáticas		Geológicas	
Mañana	4	6	1	2
Tarde	3		5	

Semana 10

	Matemáticas		Geológicas	
Mañana	1	5	3	4
Tarde	6		2	

Semana 11

	Matemáticas		Geológicas	
Mañana	3	6	2	5
Tarde	1		4	

Semana 12

	Matemáticas		Geológicas	
Mañana	1	2	4	6
Tarde	5		3	

Semana 13

	Matemáticas		Geológicas	
Mañana	4	5	1	3
Tarde	2		6	

Semana 14

	Matemáticas		Geológicas	
Mañana	3	5	2	6
Tarde	4		1	

Semana 15

	Matemáticas		Geológicas	
Mañana	2	6	1	4
Tarde	3		5	

Trabajador 1	1
Trabajador 2	2
Trabajador 3	3
Trabajador 4	4
Trabajador 5	5
Trabajador 6	6

Figura 4: Solución óptima del modelo para una planificación de 15 semanas.

El problema de la planificación de turnos de trabajo es solo una muestra de cómo las matemáticas y, en particular la IO, permiten abordar problemas de la vida real y proponer soluciones eficaces y prácticas que se adaptan a las necesidades reales de quienes los enfrentan. De esta manera, la teoría y la práctica se unen para mejorar, día a día, nuestro entorno y nuestra calidad de vida.

Sergio Anglada, Herminia I. Calvete, Carmen Galé,
Aitor Hernández y José A. Iranzo
Dpto. de Métodos Estadísticos
Universidad de Zaragoza

REFERENCIAS

- Galé, C. (2017). *El secreto de una buena organización. Logística y matemáticas* (1st ed., Vol. 55). RBA Coleccionables.
- Hillier, F. S., & Lieberman, G. J. (2021). *Introduction to Operations Research* (11th ed.). McGraw-Hill Higher Education.
- Winston, W. L. (2004). *Operations Research: Applications and Algorithms* (4th ed.). Thomson Brooks/Cole.

Imagen de la Facultad de Ciencias.

"Cuando las personas que enfrentan el problema reciben una solución, siempre emergen nuevos aspectos que podrían incorporarse al modelo."

Edificio de Matemáticas de la Facultad de Ciencias (Universidad de Zaragoza).