



PEREGRINAJE MATEMÁTICO EN EL CAMINO DE SANTIAGO

Este año 2010 es "Año Santo Jacobeo". El próximo Año Santo será el año 2021 (como publicita la Xunta de Galicia) mientras que el anterior fue el año 2004. Es curioso que el Año Santo de 1993 coincidió con la entrada en vigor del "Acta Única" que configuraba una Europa sin fronteras, situación muy unida al fenómeno euro-peísta de la peregrinación a Santiago a lo largo de los tiempos.

POR PEDRO J. MIANA

Peregrinaje matemático en el Camino de Santiago

En el Curso de Verano "Matemáticas en el Camino de Santiago" de la Universidad de Zaragoza (Jaca, 14-16 de julio de 2010) hemos presentado diversos aspectos matemáticos que encontramos en este intercambio de culturas que es el Camino de Santiago.

¿CUÁNDO UN AÑO ES UN "AÑO SANTO JACOBEO"?

Fue el Papa Calixto II, en 1120, quien, dada la magnitud que alcanzaba la peregrinación a Santiago, decidió distinguir al santuario compostelano con el "Privilegio jubilar" o de los "Años Santos", siendo aquéllos en los que el día 25 de julio, festividad del martirio de Santiago, sea domingo. El ciclo de 6-5-6-11 de los años jacobeos tiene su explicación en el ritmo de los años bisiestos y por tanto las reformas del calendario afectan a la denominación de Año Santo.

El sol tarda aproximadamente 365 días, 5 horas, 48 minutos, 45 segundos y 25 décimas en completar una vuelta sobre la eclíptica, este periodo se denomina año trópico o año tropical. Esta cantidad se puede escribir mediante la expresión:

$$365 + \frac{209275}{860400}$$

Una buena (en cierto sentido matemático, óptima) aproximación a la fracción anterior es:

$$\frac{97}{400}$$

lo cual significa que hay que añadir 97 días cada 400 años. El calendario gregoriano (que actualmente seguimos) establece que se añade un día (año bisiesto) cada 4 años, (eligiendo los años múltiplos de 4) excepto en tres de estas ocasiones (por eso 1700, 1800 y 1900 no fueron bisiestos y sí 2000). Este calendá-

rio gregoriano (instaurado por el Papa Gregorio XIII en 1582 y que sustituía al calendario juliano impuesto por Julio César en el año 46 a.C.) hace que el próximo Año Santo sea el 2021 ya que el 2016 al ser bisiesto hace saltar el día 25 de julio de sábado (en el año 2015) a lunes (en el 2016).

La Vía Láctea conocida como Camino de Santiago.

Según cuenta la tradición cristiana, los restos del Apóstol Santiago el Mayor (decapitado por Herodes Agripa en el año 42 en Palestina) fueron sepultados por sus discípulos Atanasio y Teodoro en el bosque de Libredón en Galicia.

Reencontrados por un ermitaño llamado Pelayo (quien por la noches veía extraños resplandores en las cercanías del túmulo), es el obispo de Iria Flavio, Teodomiro, quien pone en conocimiento del monarca asturiano Alfonso II El Casto (c.760-842) el descubrimiento. Hábilmente utilizado por el monarca, la noticia llega hasta Carlomagno (742-814) quién escribe en su libro IV del Codex Calixtinus, capítulo I,

"El camino de estrellas que viste en el cielo significa que desde esta tierra a Galicia has de ir con un gran ejército a combatir a los pérfidos paganos y a liberar mi camino y mi tierra, y a visitar mi basílica y sarcófago. Y después de ti irán allí peregrinando todos los pueblos, de mar a mar, pidiendo el perdón de sus pecados y pregonando las alabanzas del Señor, sus virtudes y las maravillas que obró. Y en verdad que irán desde tus tiempos hasta el fin de la presente edad. Ahora, pues, marcha cuanto antes puedas, que yo seré tu auxiliador en todo."

La Vía Láctea, al comienzo del día en los meses de verano, tiene la dirección NE-SE y es ésta la dirección que tomaban los peregrinos para

1.



2.



1.- Aparición de Santiago a Carlomagno. Libro IV del Codex Calixtinus.

2.- Mapa mundial en el Códice Vigilano, 976.

"Hacia el siglo X, el Camino de Santiago estaba en su apogeo. La orden de Cluny, recientemente fundada, promueve las peregrinaciones a Santiago."

dirigirse a Santiago. En realidad la Vía Láctea también indicaba en la cultura celta un camino místico hacia donde moría el Sol y terminaba la tierra conocida, Finisterre.

El origen de los números en el Camino de Santiago.

Hacia el siglo X, el Camino de Santiago estaba en su apogeo. La orden de Cluny, recientemente fundada, promueve las peregrinaciones a

Santiago y a cambio, los reyes cristianos hacen generosas donaciones a sus monasterios. Nos detenemos en uno de estos monasterios en el Valle del Iregua, (La Rioja), en el Monasterio de San Martín de Albelda, actualmente desaparecido.

En el año 950 se calcula que eran doscientos los monjes que vivían en el Monasterio de Albelda, siendo registrado este mismo año «el primer peregrino jacobeo extranjero conocido de la historia». Éste fue Gotescalco, obispo de la ciudad francesa de Puy, quien se detuvo en el monasterio en su ruta hacia Santiago de Compostela para que sus amanuenses le realizaran una copia de un libro de San Ildefonso de Toledo (discípulo de Isidoro de Sevilla) y recogerla en su camino de vuelta. Pero estamos interesados en otro códice, el conocido actualmente por Códice Vigilano o Albeldense, actualmente en el Monasterio de San Lorenzo del Escorial en Madrid.

Este códice contiene diversas actas de concilios, fueros y calendarios; tratados de cronolo-

Peregrinaje matemático en el Camino de Santiago

gía y aritmética básica. Su autor principal es el monje Vigila quien al final del códice se retrata con sus principales colaboradores Sarracino y García, así como los reyes de Pamplona en cuyo tiempo fue redactada la obra, constando igualmente el nombre del monasterio en el que se realizó San Martín de Albelda y la fecha en que se terminó, 976. En unas de las páginas del Códice, el autor escribe:

"Y también a propósito de las cifras de la aritmética. Es necesario saber que los indios poseen una inteligencia muy sutil y que los restantes conceptos les ceden el paso en lo que concierne a la aritmética, la geometría y demás disciplinas liberales. Esto se pone de manifiesto de la mejor manera en las nueve figuras a través de las cuales expresan cada grado de no importa qué nivel. Esta es la forma:

9 8 7 6 5 4 3 2 1."

Es ésta la primera vez que aparecen las cifra hindu-arábigas (del 9 al 1, en sentido decreciente y sin el cero, véanse imágenes adjuntas) en la Europa occidental. Más detalles e imágenes pueden encontrarse

Retratos de reyes visigodos y navarros y de artífices del Códice Vigila, 976.



en las páginas web siguientes: <http://www.albelda.org/codice.htm> y <http://www.vallenajerilla.com/albeldense/index.htm> y en el magnífico libro «Vida de los números» de A. Durán et al.

El geómetra de Dios en las catedrales góticas de Burgos y León.

Avanzamos en el Camino y llegamos a Burgos. Su catedral gótica nos espera para descubrirnos algunas de sus maravillas. La primera catedral enteramente gótica fue la iglesia de la abadía de Saint-

Denis, cerca de París, que se construyó entre los años 1140 y 1150. A pesar de que el estilo gótico fue un producto del norte de Francia, a mediados del siglo XIII la arquitectura gótica francesa había alcanzado Inglaterra, España y Alemania.

El 20 de julio de 1221, el rey de Castilla, Fernando III y el obispo de Burgos, Mauricio, ponen la primera piedra de lo que será lo que hoy conocemos como la catedral de Burgos y que sustituía al anterior templo románico. Para algunos autores, las proporciones de las catedrales góticas se basan en razones matemáticas las cuales expresaban la armonía intrínseca del mundo tal y como la estableció su creador. La representación medieval de Dios como geómetra con compás en la mano diseñando su creación (en la figura adjunta o en el Retablo del Espíritu Santo de la iglesia de Santa María de Manresa) ilustra esta idea.

La riqueza de las formas geométricas que aparecen en la catedral de Burgos es el contenido principal del libro «*Matemáticas en la Catedral de Burgos*» elaborado por el Grupo EsTalMat de Burgos y la Asociación Castellano y Leonesa de Educación Matemática «Miguel de Guzmán». De una forma amena se proponen actividades matemáticas para estudiantes de secundaria. En particular queda mostrado el conocimiento geométrico de los artesanos que construyeron y decoraron esta catedral.

Nuestro siguiente destino es León y las magníficas vidrieras de su catedral. La catedral de León es, sin duda, el edificio español con mayor número de vidrieras medievales conservadas, especialmente del siglo XIII. Los artesanos medievales de los siglos XII y XIII perfeccionaron el arte de los vitrales. Pequeñas piezas de vidrio se teñían con brillantes colores como joyas. Esta preocupación por la luz coloreada en las catedrales góticas no fue

Dios geómetra y creador. Biblia de San Luis de la Catedral de Toledo, s. XIII



accidental, sino que fue ejecutada por gente inspirada en la creencia de que la luz natural era un símbolo de la divina luz de Dios. La luz es invisible, pero permite a la gente ver; de esta misma forma, Dios es invisible, pero su existencia permite que el mundo de la materia exista. De las 737 vidrieras de la Catedral de León, una de las más conocidas es la Vidriera de La Cacería, que representa a Carlomagno rodeado de las diversas artes y ciencias del Trivium (Gramática, Retórica y Lógica) y del Quadrivium (Astronomía, Geometría, Aritmética y Música) representadas en forma de alegorías siguiendo la tradición de Marciano Capella. Sin embargo, nos vamos a detener ahora en otra vidriera, la Nº 5 de la zona Norte. Allí se representan las artes del Quadrivium directamente, sin formas alegóricas.

El movimiento del Botafumeiro

Después de varios cientos de kilómetros hemos llegado a Santiago. La plaza del Obradoiro nos recibe. Asistimos a la misa Solemne del Peregrino a las 12 horas del domingo y contem-

Peregrinaje matemático en el Camino de Santiago

plamos el volteo del Botafumeiro ("esparcidor de humos" en gallego). Este enorme incensario fue donado por el rey Luis XI de Francia en 1554 y robado por las tropas de Napoleón en 1809 durante la Guerra de la Independencia.

El Botafumeiro actual pesa aproximadamente 80 kg. y oscila colgado de unas cuerdas de 20 m. de longitud a lo largo del crucero de la catedral; puede llegar a alcanzar los 68 km/h. Un grupo de 8 tiraboleiros impulsa el botafumeiro cuando el ángulo con la normal es nulo y sueltan cuando el ángulo es máximo. El catedrático Juan R. Sanmartín de la Universidad Politécnica de Madrid ha estudiado en detalle las ecuaciones diferenciales que rigen el movimiento no conservativo del Botafumeiro. En el cuadro

anexo presentamos el resumen de su primer trabajo sobre este tema publicado en 1984 en la revista American Journal of Physics.

El estudio de Sanmartín tuvo y tiene gran repercusión. Una simulación del movimiento del Botafumeiro puede encontrarse en la siguiente dirección de la Universidad de Nantes: <http://www.sciences.univ-nantes.fr/physique/perso/gtulloue/Meca/Oscillateurs/botafumeiro.html>.

Recientemente, diversos investigadores del Instituto de Investigaciones Tecnológicas de la Universidad de Santiago de Compostela han diseñado un Botafumeiro virtual tomando en cuenta el estudio matemático de Sanmartín, véase más detalles en el artículo: <http://www.labsis.usc.es/mar/publicaciones/Botafumeiro%20VR06.pdf>.

Comentarios finales y conclusiones

El 22 de septiembre de 2008 visitó Santiago de Compostela Stephen Hawking, ocupante de la Cátedra Lucasiana de Matemáticas de la Universidad de Cambridge hasta su jubilación en 2009. El primer titular de esta cátedra fue Isaac Barrow, quien fue sucedido por Sir Isaac Newton. Este verano de 2010 Hawking ha polemizado sobre la existencia de Dios y la física moderna.

Matemáticos que han realizado el Camino de Santiago o han nacido en sus proximidades pueden encontrarse en el libro de la profesora M. Victoria Veguín, "Matemáticas en el Camino de Santiago", así como otros hechos, descubrimientos e incluso anécdotas matemáticas presentes en el Camino.

Me gustaría terminar agradeciendo a la decana A. Elduque y a la vicedecana C. Aldea la invitación para colaborar en esta revista; a los profesores A. Durán, V. Lanchares, C. Garcés, y B. Barceló su participación en el Curso de Verano, anteriormente citado, y a los alumnos inscritos, su asistencia sin la cual hubiera sido imposible la realización del mismo.

Bibliografía

- A. Durán, *Pasiones, piojos, dioses ...y Matemáticas*. Ediciones Destino, Barcelona, 2009.
- G. EstalMat de Burgos, *Matemáticas en la Catedral de Burgos*, Caja Círculo Obra Social, Burgos, 2009.
- A. Manuel, A. Durán y G. Ifrah, *Vida de los números*. T Ediciones, Madrid, 2006.
- J.R. Sanmartín, *O Botafumeiro: Parametric pumping in the Middle Ages*, Am. J. Phy. **52**(10), (1984) 937-944.
- J.R. Sanmartín, *La física del botafumeiro*, Investigación y Ciencia, 161 (1990) 7-10.
- M.V. Veguín, *Matemáticas en el Camino de Santiago*, Ediciones Orto, Madrid, 1998.

Pedro J. Miana

pjmiana@unizar.es

Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias & I.U.M.A.
Universidad de Zaragoza

O Botafumeiro: Parametric pumping in the Middle Ages.

Juan R. Sanmartín

Escuela Técnica Superior de Ingenieros Aeronáuticos, Universidad Politécnica de Madrid, Madrid, Spain

(Received 1 August 1983; accepted for publication 18 January 1984)

The pendular motion of a giant censer (O Botafumeiro) that hangs in the transept of the cathedral of Santiago de Compostela, and is cyclically pumped by men who pull at the supporting rope, is analyzed. Maximum angular amplitude attainable, and number of cycles and time needed to attain it, are calculated; the results agree with observed values (- 82°, - 17cycles, - 80 seconds) to the few percent accuracy of both the analysis and the observations and parameter measurements. The energy gain in a pumping cycle is obtained for an arbitrary pumping procedure to two orders in the small fractional change of pendular length; the relevance of the ratio (characteristic radial acceleration during pumping)/g to the gain is discussed. Effects due to rope mass, air drag on both Censer and rope, and the fact that the Censer is not a point mass, are considered. If the pumping cycle is inverted once the maximum amplitude has been attained, the Censer could be swiftly brought to rest, avoiding the usual violent stop. Historically recorded accidents, rope shape, and the influence of relevant parameters on the motion are discussed.

Las siguientes ecuaciones que rigen el movimiento son propuestas por Sanmartín. Considera la energía de un péndulo simple:

$$E = T + U = 1/2 (ML^2 \dot{\theta}^2) + MgL (1 - \cos\theta)$$

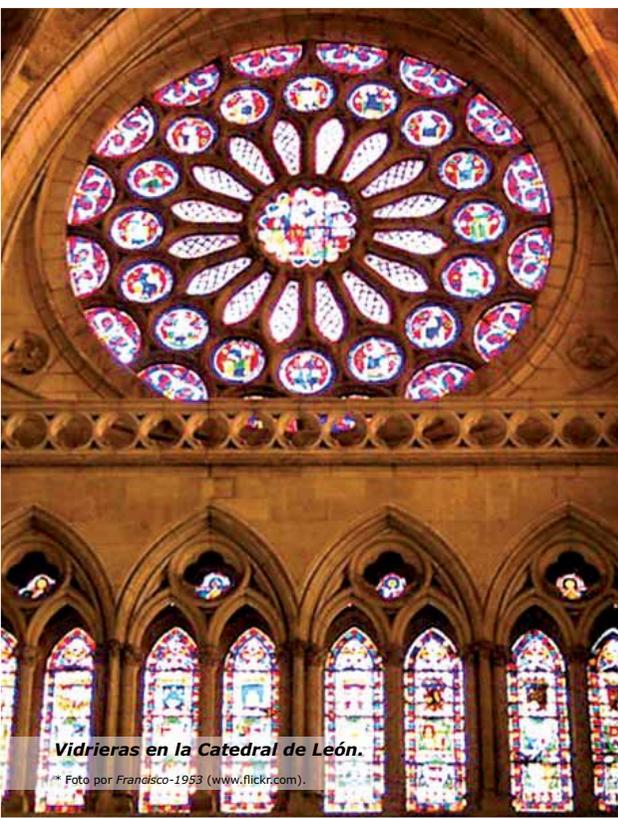
y en el caso de la amplitud máxima θ_m se tiene que $\dot{\theta}' = 0$ y por tanto:

$$E = MgL (1 - \cos\theta_m) \\ \dot{\theta}' = 2(g/L)^2 (\cos\theta - \cos\theta_m),$$

La acción de los tiraboleiros se considera a través de las ecuaciones de un péndulo variable:

$$M (2r'\dot{\theta}' + r\ddot{\theta}') = -Mg \sin\theta \\ M (r'' - r\dot{\theta}'^2 - g \cos\theta) = -F$$

donde F es la tensión de la cuerda.



Vidrieras en la Catedral de León.

* Foto por Francisco-1953 (www.flickr.com).