

GEOMETRÍA DE LA CIUDAD



Barcelona, barrio del Eixample.

*Foto por atelier/Ed Brodzinsky (www.flickr.com)

"Alegraos compañeros, que veo huellas humanas"

Palabras de Aristipo (s. IV a.C.), discípulo de Sócrates, tras naufragar en una playa perdida y encontrar figuras geométricas marcadas en la arena – citadas por Vitrubio.

El siete de junio de 1859 se aprobaba el Plan de Reforma y Ensanche (Eixample) de Barcelona, obra de Ildefonso Cerdá y Sunyer (1815–1876). Aquel diseño urbano ortogonal de cuadrícula perfecta fue decisivo para el progreso de la ciudad y es emblemático de cómo el racionalismo geométrico puede incidir en la calidad de vida de sus habitantes. En reconocimiento a su visión preclara, 150 años después, de junio de 2009 a junio de 2010, se celebra el "Año Cerdá". Como veremos, la Geometría puede ser instrumento tanto para una ideología de transformación social como para preservar los intereses opuestos. A lo largo de la historia, Geometría y urbanización van unidas.

ANTIGÜEDAD Y EDAD MEDIA

El historiador griego Herodoto (484 – 425 a.C.) describe Babilonia como una ciudad de plano cuadrado de 21 km de lado, con calles rectas que se cortaban en ángulos rectos. Egipcios y romanos aplicaron también este modelo. El Imperio Romano, para consolidar sus conquistas, construía ciudades amuralladas sobre los campamentos de sus legiones (*castrum*). De forma más o menos rectangular, estaban orientadas, por sus dos ejes de simetría las dos calles principales: el *cardo*, de Norte a Sur, y el *decumanus*, de Este a Oeste. En la intersección de ambas estaba el Foro o lugar de encuentro, ámbito de la vida pública. Las calles se alineaban paralelas a los ejes, formando manzanas rectangulares. A lo largo de la muralla, por su interior, se dejaba una franja de terreno de 9 m de anchura (*pomerium*), que delimitaba el territorio de la ciudad protegido por los dioses.

Esta estructura aún se aprecia en el plano del centro histórico de Zaragoza, la *Caesaraugusta* romana. Fue fundada en el año 14 a.C. por el César Augusto en la confluencia de los ríos Ebro, Gállego y Huerva, lo cual aseguraba agua y comunicaciones, ocupando casi un rectángulo de 895 m x 513 m. Con esas dimensiones, la ciudad podía albergar hasta unas 50.000 personas. Algunas vías actuales siguen aquel trazado romano, con el Coso (muralla), la Calle Don Jaime (*cardo*) y el eje formado por las calles Mayor, Espoz y Mina y Manifestación (*decumanus*).

POR JOSÉ MARÍA SORANDO



Zaragoza medieval.

*www.wikipedia.org

La ciudad medieval estaba amurallada y su trazado era sinuoso e irregular. Llegaba a ser laberíntico en la ciudad islámica (medina). No había una planificación según cánones geométricos. Pero en ese aparente desorden había una estructura: en el centro estaba la plaza del mercado con los edificios más representativos y de ella salían calles estrechas y tortuosas, formando barrios que agrupaban a la gente por oficios (orfebres, carpinteros, teñidores, etc.), religión (cristianos, judíos o musulmanes) o procedencia. Las casas servían a la vez de vivienda y taller a los artesanos. Los oficios no deseados dentro de la ciudad, como los curtidores por los malos olores, se ubicaban fuera de la muralla (extramuros). Las murallas tenían, además de su original función defensiva, una función recaudatoria: las mercancías que cruzaban sus puertas debían pagar un tributo.

La estructura medieval se conserva, por ejemplo, en los centros históricos de las ciudades marroquíes (islámica), de Carcasonne en Francia (cristiana), de Gerona (judía) o de Toledo (tres culturas).

LA CIUDAD MODERNA

En la Edad Moderna, con el surgimiento de los estados nación pierde poder político la ciudad y, con la excepción de las ciudades fronterizas, las murallas son cada vez menos necesari-

as por razones defensivas. En España surge la Plaza Mayor, rodeada de soportales. A partir del Renacimiento se extiende el espíritu racionalista que lleva a diseñar ciudades ideales, según patrones geométricos.

Con la Revolución Industrial del s. XIX las ciudades acogen a las masas de campesinos que acuden como mano de obra para las fábricas. Los recintos amurallados ya no son suficientes para albergar esa expansión y se deben superar los límites de la ciudad antigua. En España, la Ley del Ensanche (1864) permite derribar las murallas, pese a la oposición del ejército, autoriza las expropiaciones para trazar vías públicas y establece los requisitos de procedimiento (presentación de una memoria, planos, presupuesto), etc. Se trazan avenidas rectas, paseos con arboledas, servicios de alcantarillado, etc. Sobre los restos de la ordenada ciudad romana y de la irregular ciudad medieval, la ciudad moderna regulariza y ensancha calles, y va más allá: *salta las murallas*. Crece según tres tipos de diseños geométricos ideales: radioconcéntrico, ortogonal o lineal; con un cuarto, el estrellado, que según los casos participa de los anteriores. En cada ciudad observamos la agregación de unos y otros, reflejo de las sucesivas expansiones habidas en su historia. Veamos esos modelos, que tienen en común el estar orientados en cada caso por la plasmación geométrica de una idea matriz.

CIUDAD RADIOCONCÉNTRICA

Se caracteriza por estar centrada en una plaza, rodeada de calles en círculos concéntricos. La idea básica es que la centralidad geométrica sea representativa de una primacía: allí se ubican las sedes de los poderes político y religioso. Al mismo tiempo, se busca la fácil y rápida circulación entre el centro y la periferia. Para ello, del centro salen avenidas rectas que unen las calles concéntricas; son los radios de esa trama circular. Se forman cruces de 120°.

Son escasas las ciudades donde se puede ver la plasmación integral de este modelo. Una clásica es la ciudad italiana de Palmanova que, en realidad, no es

un círculo sino un polígono regular de 9 lados (eneágono regular) y que es, además, ejemplo de las ciudades fortificadas con forma de estrella.

Hay ciudades donde se aplicó ese modelo de forma parcial. Así, en el centro histórico de Vitoria encontramos un trazado de calles concéntricas, aunque no circulares sino con forma de almen-



Ciudad italiana de Palmanova, ejemplo de ciudad fortificada con forma de estrella.



*http://skyscrapercity.com

Geometría de la ciudad

dra. En la famosa Place de l'Étoile en París confluyen doce avenidas, en un diseño radial, pero no hay calles concéntricas. Ya en el s. XX, en Arizona (EE.UU.) la ciudad de Sun City presenta una urbanización radioconcéntrica totalmente circular.

CIUDAD ESTRELLADA

En el s. XVII se construyeron ciudades amuralladas en las zonas fronterizas de los reinos europeos. Buscando optimizar la defensa, se adoptaron formas de polígonos estrellados con bastiones en los vértices. Sus entrantes y salientes estaban pensados para que unos cubrieran a otros del fuego enemigo, haciendo máxima su eficacia artillera y mínima su vulnerabilidad, en una aplicación práctica de la Trigonometría y de la ecuación del tiro parabólico formulada por Galileo Galilei (1564 -1642) en el *Dialogo sobre los Sistemas del Mundo*. En esa época, matemáticos al servicio de los reyes aplicaban sus conocimientos a la ingeniería militar. Fue famoso el ingeniero francés Marqués de Vauban (1633-1707), del cual se conserva intacta la fortaleza de Neuf Brisach, estrella de ocho puntas en cuyo interior las calles siguen un trazado ortogonal.



CIUDAD ORTOGONAL

En el urbanismo ortogonal las calles se cortan en ángulos rectos: siguen dos únicas direcciones, perpendiculares entre sí, y en cada dirección son paralelas. Esto produce manzanas rectangulares. Así se proyectó en 1811 sobre una isla Manhattan, uno de los cinco municipios de Nueva York, con 12 avenidas longitudinales y 155 calles transversales (el número de éstas ha ido aumentando posteriormente). Unas y otras van numeradas de forma correlativa gracias al diseño ortogonal. Las direcciones se dan habitualmente mediante esas dos coordenadas (*5ª Avenida con Calle 42*, por ejemplo).

Una forma particular de este modelo es aquella en la que las calles se cortan a distancias constantes, formando manzanas cuadradas; es el llamado plano en damero. Barcelona es la ciudad donde ese modelo fue aplicado de forma más innovadora y ambiciosa, con la urbanización de *l'Eixample* a partir de 1860, siguiendo el Plan Cerdá.

El auge industrial barcelonés obligaba a sobrepasar el antiguo recinto urbano y el Ayuntamiento convocó un concurso de proyectos. Cerdá quería una ciudad pensada para las personas, desde una voluntad igualitaria, donde fuera equivalente circular por una calle o por una paralela, pues no las habría privilegiadas, lo cual conduciría a la igualación del valor de las viviendas. Esto chocaba con el

Fortaleza francesa de Neuf Brisach.

deseo de distinción de los burgueses dominantes, quienes querían emular el esplendor parisino de un centro donde confluyeran grandes avenidas en las que se ubicarían las mansiones de los nuevos ricos, mientras el proletariado se alojaría en una periferia de rango inferior.

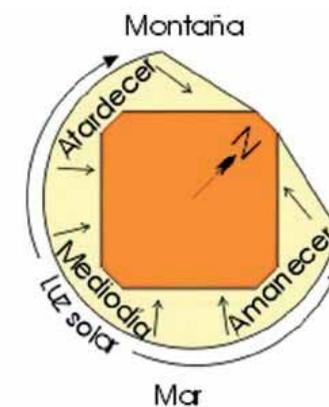
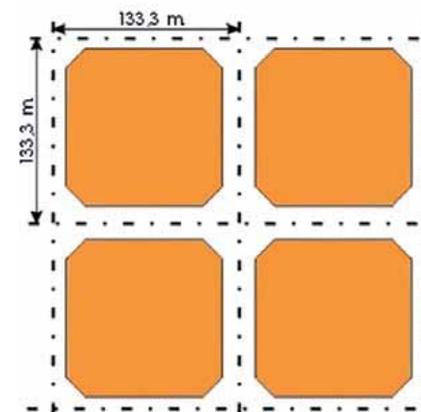
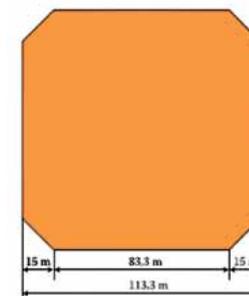
El Ayuntamiento de Barcelona rechazó el Plan Cerdá, pero éste fue después impuesto por el Gobierno Central de Madrid; cabe decir que afortunadamente pues, pese a las alteraciones que sufrió, sigue siendo válido 150 años después. Este modelo se quiso generalizar con la Ley del Ensanche y fue aplicado en otras poblaciones, como en La Carolina (Jaén).

En el Ensanche barcelonés las manzanas tienen 133 m de lado y, para mejorar la visibilidad en los cruces de 90º, Cerdá cortó 15 m de fachada a cada lado en cada esquina, formando chaflanes. Los vértices de cada manzana coinciden con los puntos cardinales y, gracias a ello, todos sus lados tienen luz directa del sol a lo largo del día. Ésta era una muestra más de la idea igualitaria que alentaba el Plan.

En el plano de Barcelona se observa, junto al puerto, la forma pentagonal irregular de la ciudad antigua. Fuera de ella, la ordenada cuadrícula del Ensanche sólo se ve alterada por el cruce de las Avenidas Diagonal y Meridiana. La Diagonal toma su nombre del hecho de unir dos vértices de la ciudad (nordeste y sudoeste). La Meridiana se llama así por estar orientada en dirección Norte-Sur, siguiendo un meridiano terrestre. Por eso, la avenida perpendicular a la Meridiana, a los pies de la montaña de Montjuich, es la Avenida del Paralelo. Es una nomenclatura con lógicas geométrica y geográfica.

GEOMETRÍA DE LA ESPECULACIÓN

En el Plan Cerdá, las manzanas debían estar construidas sólo en dos de sus lados, dejando espacio para grandes zonas verdes: plazas



Dimensiones y orientación de las manzanas en el barcelonés barri del Ensanche, según el Plan Cerdá.

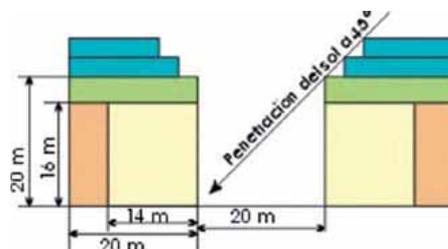
ajardinadas en el interior de cada cuatro manzanas, alternándose con amplios bulevares transversales.

La realidad posterior fue que los propietarios de los terrenos, buscando obtener el mayor beneficio económico posible, consiguieron concesiones del Ayuntamiento: primero construir en los cuatro lados de cada manzana, y después, en algunos casos, también la construcción en el patio interior de talleres, desapareciendo la mayoría de las zonas verdes proyectadas.

En el proyecto original, las casas no debían tener más de 16 m de altura y 14 m de anchura, siendo la anchura de las calles 20 m, y así el sol entraría en la calle durante buena parte del día. También en estos aspectos la especulación alteró el proyecto original. De los 16 m de altura prevista se subió hasta 20 m, argumentando que así con el sol a 45° toda la fachada era iluminada y que eso ya era suficiente (recordemos que $\text{tg } 45^\circ = 1 = 20/20$). Por una forzada e interesada analogía, como las casas tenían 20 m de altura, también se construyeron con 20 m de anchura.

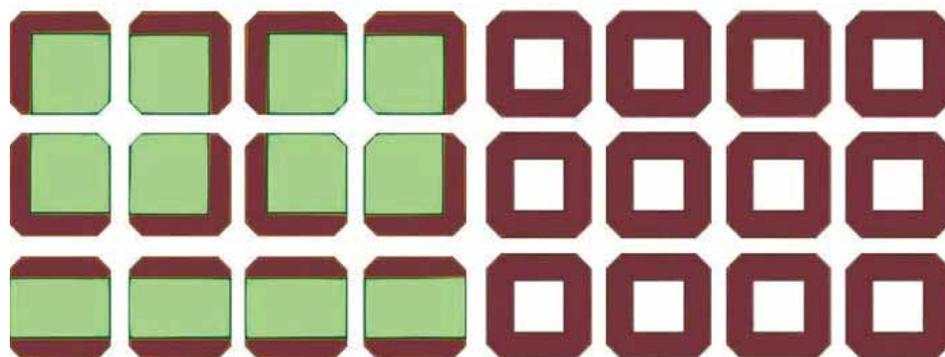
Todavía se rizó más el rizo para conseguir aumentar la construcción. Se pensó que, si se construyen áticos cuya altura sea igual a la an-

chura de su entrada respecto a la fachada, se mantiene el ángulo citado de 45°; y aún más, lo mismo si se construyen sobreáticos, siempre con la norma de adentrarse una medida igual a la altura construida.



Dimensiones previstas de las casas y sucesivas ampliaciones.

Además de igualitario, Cerdá tenía un ideal higienista: conseguir una vida sana para el pueblo, algo que en el s. XIX suponía una gran transformación social. En la ciudad antigua la población vivía hacinada, sin luz, sin zonas de esparcimiento ni alcantarillado; lo cual era causa de muchas enfermedades y una alta mortalidad infantil. Así que proponer zonas verdes y viviendas separadas por amplios espacios, donde corra el aire y entre la luz natural para todos, era algo revolucionario.



El proyecto inicial del barrio del Ensanche y lo que luego se construyó.

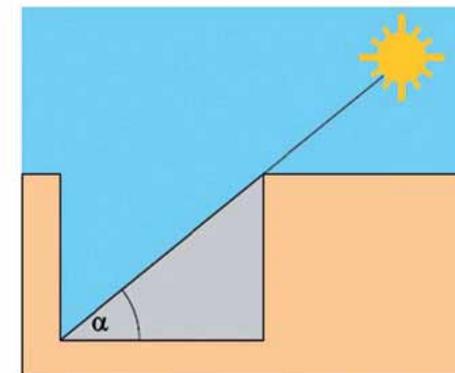
¿Qué consecuencias tuvieron las citadas alteraciones del proyecto? La Geometría elemental nos permite deducirlas. Un sencillo cálculo, por descomposición en prismas, revela que el volumen de construcción aumentó en cada manzana desde los 56.640 m³ previstos hasta los 171.800 m³ realizados (sin contar los áticos ni los talleres interiores); es decir, más de tres veces lo proyectado. Pese a ello, el diseño de Cerdá era de tal amplitud que siguió aportando una considerable mejora sobre la habitabilidad de la urbe antigua.

Para poner coto a esos abusos, hoy en día los planes de ordenación urbana establecen en cada zona cuál es el *volumen máximo edificable*; lo cual abre una nueva cuestión geométrica. Para un mismo volumen y sobre una misma base los cuerpos geométricos pueden tener distintas superficies. La Arquitectura puede jugar con ello para lograr una mayor iluminación natural de las viviendas, algo que aporta mayor calidad de vida. De hecho los "pisos exteriores" son más valorados.

EL SOL SALE PARA TODOS

Precisamente, otra consecuencia de las presiones sobre el Plan Cerdá tuvo que ver con la iluminación de las fachadas. De acuerdo con la anchura de las calles (20 m) y la altura proyectada para los edificios (16 m), el ángulo α de elevación solar con que se produciría la iluminación total de una fachada (en realidad de dos, recuérdese su orientación) venía dado por el $\text{arctg}(16/20) = 38^\circ 40'$.

Como ya dijimos, la elevación de los edificios redujo ese ángulo a 45°. ¿Qué importancia tiene esa diferencia de 6° 20'? Por ejemplo, en un día de 12 horas solares, la iluminación total se produciría en el primer caso durante un recorrido de 51° 20', que equivale a 3 h 25 min; mientras que en el segundo se reduciría a 45°, es decir 3 h. En definitiva, 25 minutos menos



Iluminación solar de las fachadas.

de sol para dos fachadas antes de mediodía y otro tanto para sus opuestas por la tarde.

Una alternativa, también igualitaria en cuanto a la iluminación de las viviendas, son los inusuales edificios cilíndricos (hay uno en la zaragozana Plaza de San Antón, cercano a las Murallas Romanas); donde la ausencia de esquinas crea una fachada única y permite que el recorrido solar beneficie a todas las ventanas por igual. Además, para un perímetro de fachada fijo, se maximiza la superficie construida (aunque probablemente surjan otros problemas prácticos).

CIUDAD LINEAL

El modelo lineal es la urbanización a lo largo de una vía de comunicación (carretera, ferrocarril, río, etc). Así ha ocurrido en poblaciones españolas a lo largo del Camino de Santiago o en Volgogrado (antes Stalingrado) en Rusia, siguiendo el curso del Río Volga. A finales del s. XIX, este modelo fue teorizado por el arquitecto y urbanista español Arturo Soria y Mata (1844 - 1920) para resolver el nascente problema del transporte y superar la dicotomía entre el campo y la ciudad. Su diseño conseguía minimizar la suma de trayectos de todos los puntos entre

Geometría de la ciudad

sí, un propósito de formulación puramente matemática. También, descongestionar las ciudades y lograr el contacto de sus habitantes con la naturaleza.

Arturo Soria proponía unir las viejas ciudades con nuevas urbanizaciones alargadas de 500 m de ancho, con una vía central de 40 m de anchura por la que circulaba el tren. El crecimiento de la ciudad siempre debía ser longitudinal y paralelo a la vía principal. Con estos tramos lineales se formaría una trama triangular, con el campo en el interior junto a la ciudad. En su proyecto ideal esa trama cruzaría Europa, uniendo Cádiz con San Petersburgo.

De la superficie total de la ciudad, un quinto sería para viviendas y el resto en parte para la industria pero sobre todo para la agricultura. En cada parcela unifamiliar de 400 m² estaban previstos 80 m² para la casa y 320 m² para un huerto-jardín. Este modelo sólo se llevó a cabo en Madrid, con 700 casas unifamiliares a lo largo de 5 km que, en 1920, alojaban a 4.000 habitantes (actual Calle Arturo Soria). En la foto aérea del Madrid actual vemos qué queda de aquella Ciudad Lineal: se aprecia la urbanización a lo largo de la avenida serpenteante pero, fuera de ella, no está el campo sino casas y más casas.

SOLUCIONES NO EUCLÍDEAS

Algo interesante de estudiar desde las Matemáticas es cómo en esos trazados urbanos se alteran las reglas de la Geometría Euclídea del Plano. Por ejemplo, la distancia más corta en-

“En la foto aérea del Madrid actual vemos qué queda de aquella Ciudad Lineal: se aprecia la urbanización a lo largo de la avenida serpenteante pero, fuera de ella, no está el campo sino casas y más casas.”

tre dos puntos no siempre es la que da el segmento que los une, pues no podemos atravesar edificios. Tampoco suele ser única, puede haber recorridos alternativos equivalentes (lo saben bien taxistas y repartidores). La distribución de servicios en puntos equidistantes de uno dado (buzones de correos, sucursales bancarias, etc.) ya no viene dada por los puntos de una circunferencia. Y si mantenemos dicho nombre para el lugar geométrico caracterizado por esa propiedad, las circunferencias ya no son redondas y, además, ¿cuántos puntos tienen?

A modo de ejemplo del campo que se abre con estas cuestiones, trataremos la respuesta a la última pregunta. Si en un plano en damero (como Barcelona) consideramos como unidad la longitud de una manzana y tomamos como centro de la circunferencia la intersección de dos calles, se obtiene:

RADIO	1	2	3	4	...	$r \in \mathbf{N}$
Nº DE PUNTOS	4	8	12	16	...	$4 \cdot r$
RADIO	0,5	1,4	2,6	3,7	...	$r \in \mathbf{R}^+ - \mathbf{N}$
Nº DE PUNTOS	4	12	20	28	...	$4 \cdot [2 \cdot E(r) + 1]$



Solución adoptada por la ciudad de Brondy para resolver los problemas de logística.

¿Y si el centro estuviera en otro punto? ¿Y si...? La mediatriz, lugar geométrico de los puntos equidistantes de dos dados, tiene ahora también un número finito de puntos, ¿cuántos?. ¿Y qué pasa con la Desigualdad Triangular o con las cónicas (también lugares geométricos)?

NUEVOS MODELOS

La ciudad evoluciona y se renueva. En los modernos aeropuertos, el diseño fractal de las terminales optimiza la utilización del espacio y de los servicios compartidos por un mayor número de puntos de embarque, así como las posibilidades de ampliaciones futuras. Por motivos de seguridad y de logística, en Brondy, a las afueras de Copenhague, grupos de 24 parcelas con viviendas unifamiliares forman coronas circulares donde, desde la plaza central de cada corona, se pueden controlar y acceder a todas las parcelas minimizando desplazamientos. Cambian los modos de vida, surgen y surgirán nuevas necesidades y nuevas soluciones geométricas.

José María Sorando

Departamento de Matemáticas

IES Elaios, Zaragoza

jmsorando@ono.com

http://catedu.es/matematicas_mundo