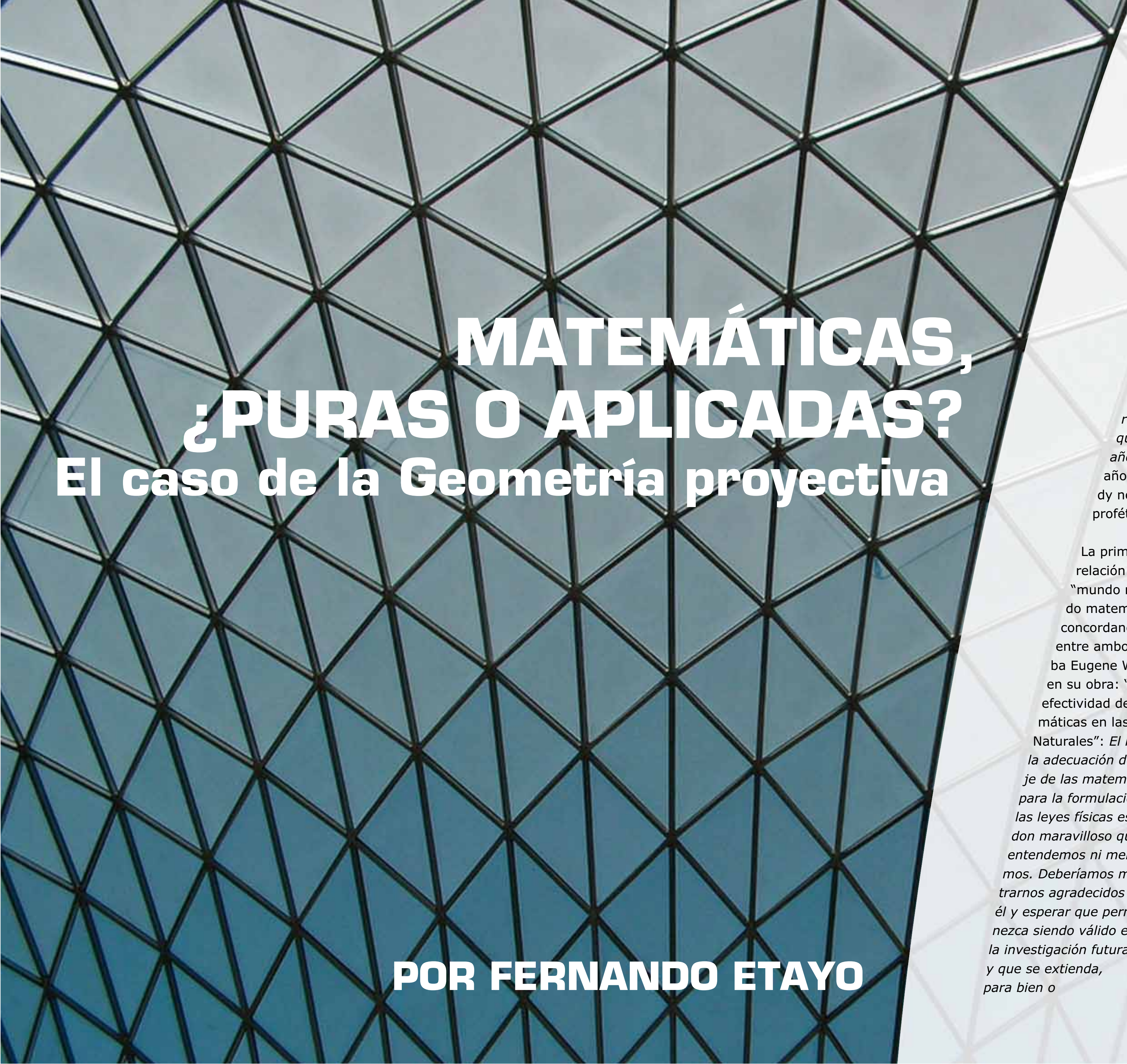


# MATEMÁTICAS, ¿PURAS O APLICADAS?

## El caso de la Geometría proyectiva

**POR FERNANDO ETAYO**

### INTRODUCCIÓN

Una controversia larga en el tiempo es la de la aplicabilidad de las Matemáticas. Opiniones contrarias y tajantes se han sucedido a lo largo de la historia. Así, por citar sólo una, Hardy escribía, en su "Apología de un matemático[1]": *el estudio de las matemáticas es, si bien poco útil, una ocupación perfectamente inocente e inocua*. Más adelante continuaba: *Hay una conclusión tranquilizadora y fácil para un matemático auténtico. Las matemáticas auténticas no tienen efectos sobre la guerra. Nadie ha descubierto todavía ninguna aplicación militar de la teoría de números y de la relatividad, y no parece probable que alguien lo haga en muchos años*. Estas palabras, escritas el año 1940 demuestran que Hardy no tenía precisamente visión profética.

La primera cuestión es la relación existente entre el "mundo real" y el mundo matemático. Existe una concordancia muy grande entre ambos, como señalaba Eugene Wigner en 1963, en su obra: "La irrazonable efectividad de las Matemáticas en las Ciencias Naturales": *El milagro de la adecuación del lenguaje de las matemáticas para la formulación de las leyes físicas es un don maravilloso que ni entendemos ni merecemos. Deberíamos mostrarnos agradecidos por él y esperar que permanezca siendo válido en la investigación futura y que se extienda, para bien o*

*Foto por *Daniele_Sartori* (www.flickr.com) *para mal, para placer nuestro, aunque también tal vez para nuestra perplejidad, a ramas más amplias del saber*. Estas palabras fueron respondidas por Gelfand, cuando escribió: *Eugene Wigner escribió un famoso ensayo sobre la irrazonable efectividad de las Matemáticas en las Ciencias Naturales. Él quería decir en la Física, por supuesto. Sólo una cosa es más irrazonable que la irrazonable efectividad de las Matemáticas en la Física, y es la irrazonable falta de efectividad de las Matemáticas en la Biología*. La utilización de las técnicas matemáticas en el estudio del genoma, por citar un ejemplo de actualidad, revela nuevamente que el don profético no abunda entre quienes filosofan sobre estos temas[2]. Así que, querido lector, no me lo pidas a mí. Mi discurso será mucho más pegado a la tierra, o a la pizarra, por mejor decir.

Una característica señalada por muchos autores es la del *placer estético de las Matemáticas* (así justamente se titula un libro[3] de Serge Lang) y la del desafío intelectual: igual que el hombre buscó las fuentes del Nilo, llegar al Polo Norte o subir al Everest, ansía descifrar los enigmas que se alzan ante él en su devenir por las Matemáticas. Jacobi, en 1830 escribía que *el único objetivo de la Ciencia es el honor del espíritu humano, y siendo así, una cuestión referente a la teoría de números es tan valiosa como otra que se refiera al sistema del mundo*. Dieudonné, tituló su libro[4] de 1987 con esa frase de Jacobi, *en honor del espíritu humano*.

Como decía, me voy a centrar en un ejemplo para, a partir de él, poder sacar alguna conclusión. El ejemplo es el de la Geometría Proyectiva. Antes de describirlo, pensemos en dónde la situarían diferentes personas.

- Un ingeniero de la vieja escuela quizá nos diría que es una parte de la Geometría Descriptiva, que trata de la representación plana de los objetos del espacio tridimensional.
- Cayley nos diría, bueno, nos dijo, que *la Geometría Proyectiva es toda la Geometría*.
- Un alumno del modelo bourbakista de las matemáticas, como tuvo mi generación, diría que es un objeto abstracto de Matemática Pura (un espacio cociente de un espacio vectorial).
- Un ingeniero informático que se dedique a la reconstrucción de imágenes por ordenador usará, casi con total seguridad sin saberlo, resultados de Geometría Proyectiva.

¿Es Matemática Pura o Aplicada la Geometría Proyectiva?

## UN PASEO POR LA HISTORIA

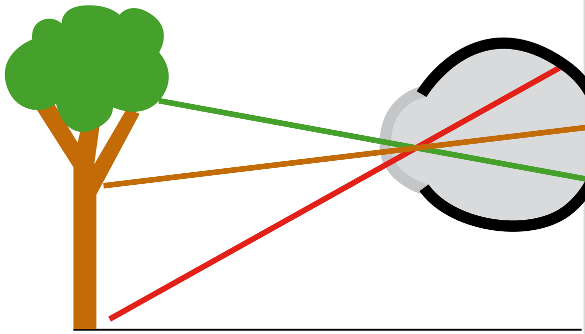
Vamos a ver muy sucintamente cómo ha evolucionado la Geometría Proyectiva, desde sus orígenes hasta nuestros días. Más que los resultados muy notables que ha dado, queremos resaltar las relaciones con otras disciplinas y las ideas que han movido su estudio y su evolución.

La Geometría Proyectiva nació cuando se trató de dibujar fielmente lo que se veía[5]. Dicho con palabras modernas, se buscaba el modelo matemático que explique tal representación fiel de la realidad visual. Se puede decir que Alberti (1404-1472) en su tratado sobre la Pintura de 1435 formula las preguntas precisas:

- *¿Qué se conserva por proyección, si no lo hacen ni la longitud ni los ángulos?*
- *¿Qué relación hay entre dos secciones de la misma figura?*
- *¿Cuáles son las propiedades comunes a dos secciones cualesquiera?*

Estas preguntas son de naturaleza plenamente matemática. Poco tiempo después, Brunelleschi (1377-1446) enuncia los llamados "experimentos" que dan apoyo teórico a lo que se estaba consiguiendo ya dibujar con corrección. El primer experimento se pregunta cómo se puede saber si un cuadro tiene buena perspectiva. La respuesta es si lo retratado en el cuadro se puede prolongar fuera de éste coincidiendo con lo que se ve en la realidad (la manera de exponerlo era más complejo, usando un espejo) En Durero (1471-1528) encontramos deliciosas ilustraciones de los principios de la perspectiva:

Cuando vemos por nuestro ojo...



...la aplicación matemática que estamos definiendo se denomina *proyección cónica*. Proyectamos el espacio tridimensional que nos rodea sobre una superficie bidimensional (la retina, el lienzo del cuadro, la película fotográfica). Las preguntas de Alberti requieren que construyamos el *modelo ma-*

1. **G. H. Hardy**: *Apología de un Matemático*, Ed. Nivola, 1999.
2. **I. M. Gelfand** (1913-2009), autor de más de 800 artículos de investigación y una treintena de libros, fallecido el pasado 5 de octubre, realizó importantes aportaciones en muchas ramas de las Matemáticas. Dedicó atención, en particular, a la Biología teórica y experimental, y fue uno de los creadores del Instituto de Biología Física dentro de la Academia de Ciencias de la URSS. Por eso sus palabras deben tomarse con la autoridad de quien las pronunció.
3. **S. Lang**: *El placer estético de las matemáticas*, Alianza Universidad, 1984.
4. **J. Diudonné**: *En honor del espíritu humano. Las matemáticas hoy*, Alianza Universidad, 1989.
5. Existe una bibliografía muy amplia sobre el tema. Citemos los siguientes libros:

   **J. L. Coolidge**: *A History of Geometrical Methods*, Dover, 2003

   **H. Damisch**: *El origen de la perspectiva*. Alianza Ed., 1997.

   **W. M. Ivins, Jr.**: *Art and Geometry. A study in space intuitions*. Dover, 1964.

   **M. Kemp**: *La ciencia del arte. La óptica en el arte occidental de Brunelleschi a Seurat*. Ed. Akal, 2000.

   **D. Pedoe**: *La Geometría del Arte*. Ed. Gustavo Gili, 1979.

   **L. da Vinci**: *Tratado de la Pintura*. Ed. Akal, 2007.

   **H. Wölfflin**: *Conceptos fundamentales de la Historia del Arte*. Ed. Optima, 2002.

   **S. Woodford**: *Cómo mirar un cuadro*. Ed. Gustavo Gili, 2004.

*temático* subyacente. Ese modelo es la Geometría Proyectiva, que no resulta sencillo de explicar en pocas palabras: a la Humanidad le costó hasta mediados del XIX, es decir, cuatro siglos, para entenderlo bien, y uno más para explicarlo como hoy lo hacemos, usando Álgebra Lineal.

**Un poco de historia**[6]:

Desde el punto de vista matemático, se suele considerar que los fundadores fueron los geómetras franceses **Gérard Desargues** (1591-1661) y Blaise Pascal (1623-1662). La geometría de Desargues es una geometría sin círculos, distancias, ángulos, mediatrices ni paralelismos. La labor de Desargues fue seguida solamente en su época por Pascal. Los resultados más célebres que obtuvieron se refieren a configuraciones de rectas.

Contemporáneo de ambos fue **Descartes** (1596-1650). La geometría cartesiana se presenta como un edificio formidable: al dotar de coordenadas a los puntos del plano puede apoyarse en el álgebra para encontrar ecuaciones de curvas y obtener nuevas propiedades. Históricamente es un paso crucial, el mayor avance desde la geometría de los griegos. La aparición del cálculo diferencial e integral con **Newton** (1642-1727) y **Leibnitz** (1646-1716) dotó a la geometría analítica de Descartes de todas las herramientas de álgebra y análisis. La Geometría Proyectiva como parte de las Matemáticas dejó de cultivarse. Sin embargo, continuó el estudio de la Geometría Proyectiva como parte de la Geometría Descriptiva, esto es, para realizar Dibujo Técnico.

Al finalizar el siglo XVIII comenzó a brillar en Francia una escuela geométrica de gran valor. Su promotor fue **Gaspard Monge** (1746-1818). Profesor de la Escuela Politécnica de París, autor de un célebre tratado de *Geometría Descriptiva* en el que sienta las bases del sistema diédrico de representación; fue capaz de crear una magnífica promoción de geómetras, alumnos suyos: **Brianchon** (1785-1823); **Poncelet** (1778-1867), el verdadero artífice del redescubrimiento de la Geometría Proyectiva, autor de *Traité des propriétés projectives des figures*, que se publicó en 1822, y que pasó a ser el artículo fundacional de la disciplina.; **Gergonne** (1771-1859), **Chasles** (1793-1880), continuador de la obra de Poncelet y redescubridor de la obra de Desargues, lo que permitió enlazar los orígenes de la Geometría Proyectiva en el siglo XVII con los avances del XIX.

Estos autores, y otros que no cito, hicieron progresar la Geometría Proyectiva como disciplina propia dentro de las Matemáticas, y obtuvieron resultados que la alejan del interés exclusivo por los problemas de perspectiva. De modo muy simple y general, se puede decir que desde mediados del siglo XIX Alemania tomó el relevo a Francia, ocupando el lugar central de la geometría durante un siglo. Debemos citar los nombres de **Steiner** (1796-1863), **Plücker** (1801-1868), **Möbius** (1790-1868) y **von Staudt** (1798-1867) que fue muy relevante en su momento, porque consiguió definir la *razón doble*[7], que es el principal invariante proyectivo, sin utilizar la noción de distancia.

**“La geometría cartesiana se presenta como un edificio formidable... Históricamente es un paso crucial, el mayor avance desde la geometría de los griegos.”**

Mientras, el inglés **Cayley** (1821-1895) se dedicó a estudiar profundamente la geometría proyectiva con el empleo de coordenadas y **Laguerre** (1834-1866) obtiene las fórmulas para distancias y ángulos de la geometría euclídea considerada dentro de la proyectiva. Esto es conceptualmente muy importante, porque convierte a la Geometría Proyectiva en la más general de todas las geometrías. Para entender las diferentes geometrías, pensemos en sus movimientos o transformaciones planas, de más general a más particular:

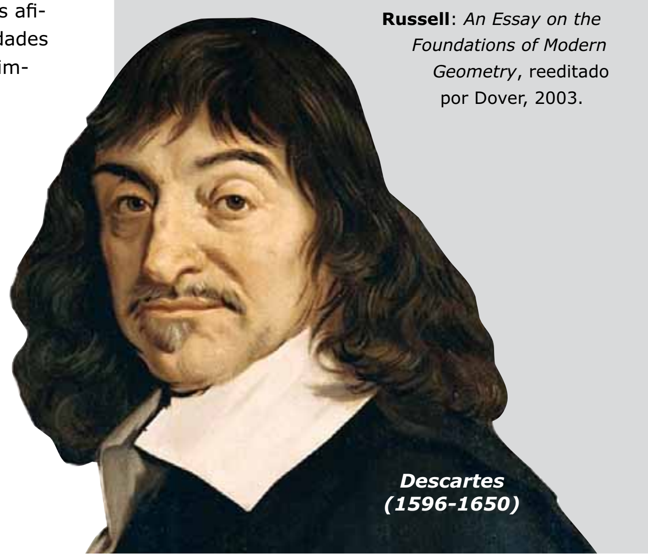
- Los movimientos de la Geometría Proyectiva son las aplicaciones proyectivas. Conservan las alineaciones (puntos alineados se transforman en puntos alineados) y las razones dobles.
- Los de la Geometría Afín son las afinidades. Además de las propiedades anteriores conservan razones simples y paralelismo de rectas.
- Los de la Geometría Equiforme son las semejanzas: giros, traslaciones y homotecias. Conservan además de las precedentes los ángulos.
- Los de la Geometría Afín Euclídea (la que se estudia en la etapa escolar), son los giros y las traslaciones. Se conservan, además de todas las propiedades precedentes, las distancias.

6. En muchos libros de historia de las matemáticas pueden encontrarse los datos aquí contenidos. De los autores que se citan puede hallarse amplia información biográfica en la hoja web:

   http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/index.html

7. La razón doble de cuatro puntos alineados se define como cociente de dos razones simples (de ahí su nombre): [a,b,c,d] = (a,c,d) : (b,c,d) = {(c-a)/(d-a)} : {(c-b)/(d-b)}. Es difícil explicar por qué es un invariante proyectivo.

8. Las geometrías hiperbólicas fueron introducidas por Lobachevski, Bolyai (padre e hijo) y Gauss entre 1820 y 1830 y supusieron una verdadera conmoción, porque se planteó la cuestión de qué geometría es la del Universo físico. A este respecto es muy curioso señalar cómo Bertrand Russell en 1897 abordaba el problema de la Geometría “real”, dando como solución que ésta era la proyectiva, en el sentido de que abarcaba a la euclídea y a la hiperbólica. Además, intuía que la teoría de variedades de Riemann, muy difícil de entender, nunca pasaría de ser una mera elucubración sin futuro. Otra vez la visión profética equivocada. Sin embargo, el libro es muy interesante porque está escrito con gran cercanía a la obtención de los resultados mencionados. Véase: **B. Russell**: *An Essay on the Foundations of Modern Geometry*, reeditado por Dover, 2003.



***Descartes (1596-1650)***

Habíamos comentado al principio que la motivación estética es muy importante en las Matemáticas. El resultado anterior, denominado a veces estratificación de las geometrías, los matemáticos lo encontramos bello. En su momento era eso, un bello resultado. En el siglo XX será un ingrediente esencial para poder realizar la reconstrucción de imágenes por ordenador.

**“En su momento era eso, un bello resultado. En el siglo XX será un ingrediente esencial para poder realizar la reconstrucción de imágenes por ordenador.”**

Para colmo, en 1871 **Klein** (1849-1925) le comunica a Cayley que las geometrías no euclídeas de tipo hiperbólico se pueden expresar en función de la geometría proyectiva. Con todos estos antecedentes, exclama Cayley la frase que habíamos ya citado: **La Geometría Proyectiva es toda la Geometría**[8]. La concepción de las geometrías como la teoria de los invariantes de la acción de un grupo sobre un espacio es la contenida en el célebre *Programa de Erlangen de Klein*.

En el siglo XX se produce una nueva revolución en la Geometría Proyectiva: al introducirse los espacios vectoriales, se presenta una nueva definición (equivalente a las anteriores) del espacio proyectivo como conjunto de rectas de un espacio vectorial de dimensión una unidad superior. Entra entonces el Álgebra Lineal con todo su aparato, simplificando muchas demostraciones y cálculos. La Topología también se desarrolla y convierte a los espacios proyectivos en objetos de su estudio. Lo mismo ocurre con otras disciplinas matemáticas. Es especialmente importante el caso de la Geometría Algebraica (que estudia las variedades determinadas por ecuaciones polinómicas) cuyo marco natural está dado por el espacio proyectivo.

**La aportación española**:

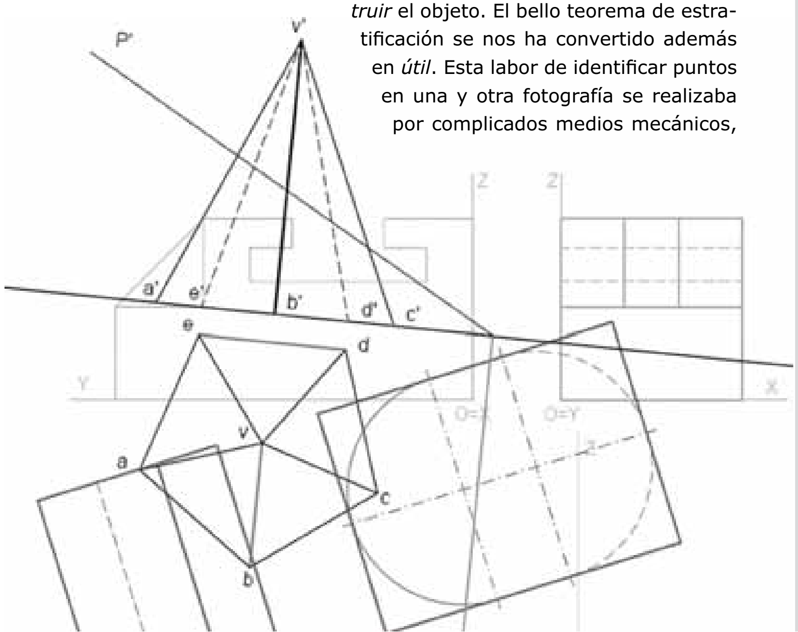
El siglo XIX la ciencia española, y la matemática en particular, estaban muy alejadas de la primera línea de investigación. Los estudios de Matemáticas sólo se podían cursar en las universidades de Madrid, Zaragoza y Barcelona (situación que permaneció hasta los años sesenta del siglo XX). Sin embargo, tampoco era un absoluto desierto. La geometría de Staudt fue pronto enseñada en España. A finales del siglo XIX se edita la primera revista matemática, *El Progreso Matemático*, en la Universidad de Zaragoza, por el afán del Profesor **García de Galdeano**. A principios del siglo XX se constituiría la Sociedad Matemática Española y las primeras generaciones de matemáticos españoles irían a recibir formación para su doctorado a otros países europeos, principalmente a Alemania.

Centrándonos en el caso de la Geometría Proyectiva hay que destacar el caso de **Reyes y Prósper** (1863-1922), que desde su recóndita posición de profesor de instituto en varias capitales (Albacete, Jaén, Cuenca y, fundamentalmente, Toledo) mantuvo correspondencia científica con autores de la talla de Klein o Pasch, publicó en los años 1887 y 1888 sendos artículos en los *Mathematischen Annalen* alemanes sobre geometría proyectiva y en la Universidad de Kazán (Rusia) uno sobre geometrías no euclídeas (en esta universidad había desarrollado su actividad Lobachevski).

**La fotogrametría y la reconstrucción de imágenes por ordenador:**

Vamos a citar este tipo de aplicación, porque es el más ligado al desarrollo histórico que hemos presentado. La fotogrametría, que comenzó a mediados del siglo XIX, y la visión por computador, de segunda mitad del XX, tienen un planteamiento común entre sí y común con nuestra visión binocular: a partir de dos imágenes diferentes de un mismo objeto ser capaces de reconstruir las verdaderas proporciones del objeto.

Una imagen se obtiene realizando una proyección cónica, que es una aplicación proyectiva y, por tal, conserva alineaciones y razones dobles, pero no razones simples, ni ángulos, ni distancias. ¿Cómo, pues, a partir de dos imágenes se va a poder reconstruir las proporciones de un objeto, esto es, los ángulos y el tamaño relativo de sus lados? Hallando las coordenadas de ocho puntos en cada una de las dos fotos, y teniendo en cuenta la estratificación de las geometrías antes mencionada, se consigue *reconstruir* el objeto. El bello teorema de estratificación se nos ha convertido además en *útil*. Esta labor de identificar puntos en una y otra fotografía se realizaba por complicados medios mecánicos,



9. Resulta muy difícil encontrar en los libros de Geometría Proyectiva mención a la Geometría Epipolar. Ni siquiera en libros clásicos de historia de la geometría, como el de J. L Coolidge: *A History of Geometricla Methods*, reeditado por Dover, 2003.

Hay que recurrir a los libros de Ingeniería, como los siguientes, usados en Ingenierías de Telecomunicaciones o Informática:

**R. I. Hartley, A. Zisserman**: *Multiple View Geometry in Computer Vision*. Cambrdige Univ. Press, 2004.

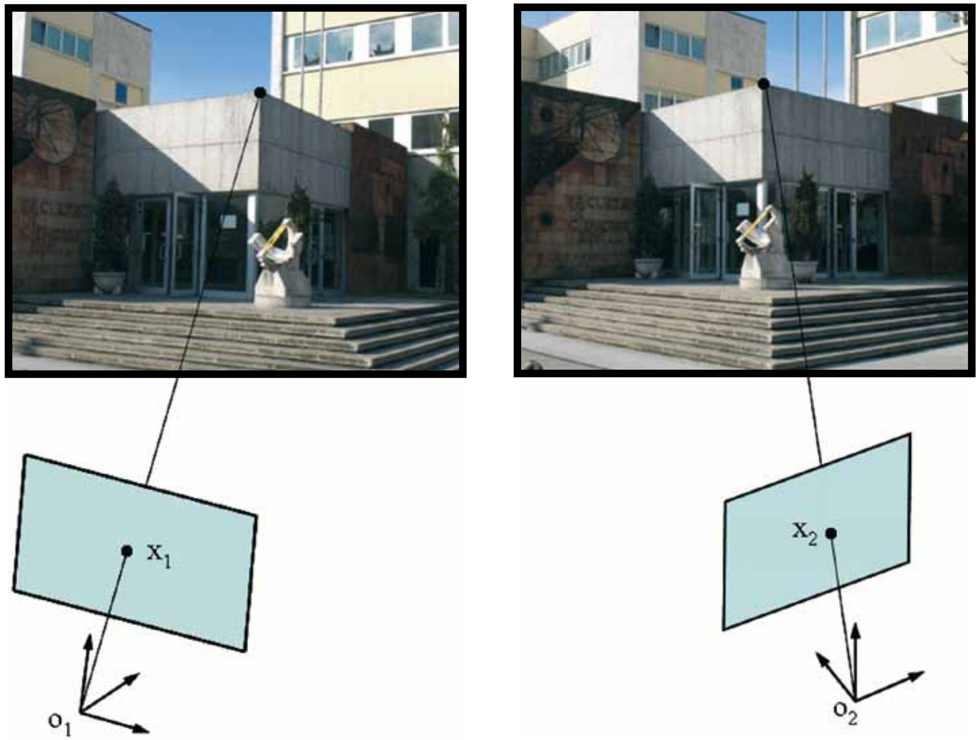
**Y. Ma, S. Soatto, J. Kosecká, S. Shankar Sastry**: *An Invitation to 3-D Vision*. Springer, 2004.

**I. Herman**: *The Use of Projective Geometry in Computer Graphics*. Springer, 1992.

Por otra parte, es de señalar que la enseñanza de la fotogrametría impartida en numerosas escuelas técnicas (por ejemplo de Agrónomos) sigue los mismos principios de la Geometría Epipolar, y obviamente se desarrolló previamente a la reconstrucción de imágenes por odenador.

como el estereocomparador de Pulfrich (1901). Hoy día se realiza por medios computacionales. La parte de la Geometría Proyectiva que estudia esta cuestión es la llamada Geometría Epipolar[9].

En esta historia no debemos olvidar al coronel de ingenieros francés Aime Laussedat (1819-1907), quien, en 1858, empieza a dibujar mapas cartográficos a partir de vistas, manuales primero, fotográficas después, dando origen a la fotogrametría. En 1863 la Real Academia de Ciencias de Madrid convocaba un concurso para: *Determinar los errores probables que deben resultar en los planos topográficos deducidos de dos perspectivas fotográficas, teniendo en cuenta todas las causas que pueden influir en su producción*. Ganó Laussedat con la memoria *Sobre la aplicación de la fotografía al levantamiento de planos*.




**CONCLUSIONES**

La Geometría Proyectiva nació para responder unas preguntas planteadas desde el Arte, se desarrolló dentro de la Geometría Descriptiva, trascendió ese ámbito cuando, siendo su geometría Elíptica, incorporó en su seno a las Geometrías Euclídea e Hiperbólica, haciéndonos entender la naturaleza proyectiva de la razón doble y de muchas propiedades de configuraciones y de las cónicas, estableció puentes con otros ámbitos de la Matemática (Variable Compleja, Topología, Geometrías Algebraica y Diferencial, etc.) y tuvo de modo natural una hija, la Geometría Epipolar, que da fundamento matemático a la Fotogrametría y a la Reconstrucción de Imágenes por Ordenador. (Otro ejemplo de utilización de la Geometría Proyectiva es el de la Criptografía, que emplea los planos proyectivos sobre cuerpos finitos).

**“Seguro que si hubiéramos tenido siempre presentes estas reflexiones, la disciplina hubiera gozado de otra consideración.”**

Aquí deberíamos entonar un *mea culpa* como profesores, porque *lo apretado de nuestros programas* nos hace prescindir muchas veces del principio de la historia (¿por qué nació la Geometría Proyectiva?) y de sus aplicaciones fuera de las Matemáticas. Todo esto, suponiendo que la Geometría Proyectiva siga en el plan de estudios de Matemáticas, lo cual me temo que en bastantes casos será mucho suponer. Seguro que si hubiéramos tenido siempre presentes estas reflexiones la disciplina hubiera gozado de otra consideración por parte de nuestros colegas y nuestros alumnos.

Volviendo al comienzo, ¿pertenece al ámbito de las Matemáticas Puras o al de las Aplicadas? Yo diría que pertenece a la Matemática, en singular y sin adjetivo. La Matemática está en diálogo permanente con la realidad que le rodea, diálogo que a veces parece monólogo de una u otra parte, porque durante años o siglos incluso avanzan por caminos separados[10]. El avance de la Matemática resulta unas veces de la resolución de problemas externos a la disciplina, de la construcción de modelos. Otras veces, el desarrollo de las propia Matemática proporciona las condiciones para que se puedan estudiar problemas de otras disciplinas[11]. Sobre el porqué de la concordancia de ese diálogo no me pronunciaré, habida cuenta del éxito de las profecías que citaba al principio de este escrito, pero el lector audaz podrá solazarse con las reflexiones de Penrose sobre el tema[12].

10. Por ejemplo, el problema del quinto postulado de Euclides duró muchos siglos, circunscrito al ámbito matemático “puro”. Hasta el siglo XIX no se plantea la cuestión de que el Universo físico pueda no tener geometría euclídea. Lo mismo podríamos decir con la teoría de números. Hoy día todos usamos la factorización de números primos para codificar nuestras claves bancarias, de correo, etc.

11. Por citar un ejemplo, cuando se desarrolló la teoría de la Relatividad, el aparato matemático del cálculo tensorial acababa de desarrollarse. Cuando llegó la Relatividad General, para la que el espacio-tiempo es una variedad diferenciable, esta noción se manejaba, aunque no había sido todavía definida con rigor (esto es, definida, porque en Matemática sólo se define con rigor; en caso contrario no es definición).

12. **R. Penrose**: *El camino a la realidad*, edición española de Debate, 2006.

13. **B. O’Neill**: *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*, Academia Press, 1983.

# Matemáticas, ¿puras o aplicadas? El caso de la geometría proyectiva

Yo diría que un trabajo que contiene definiciones y teoremas nuevos es un trabajo de Matemática. Entre los teoremas cabe considerar los procedimientos o algoritmos apropiados para abordar cálculos complejos. Por poner un ejemplo trivial, las cónicas proyectivas reales se clasifican según su rango y signatura. Esto es un teorema. También son teoremas los que dan los procedimientos de cálculo de rango y signatura de una matriz. Esta es una situación muy frecuente en las aplicaciones de la Matemática, en las que a menudo se emplean procedimientos de cálculo exacto o aproximado, cuya corrección tiene que estar (matemáticamente) demostrada. Un trabajo que utilice resultados de Matemática para abordar problemas de una disciplina concreta será un trabajo de dicha disciplina. De hecho, un mismo trabajo puede tener las dos características simultáneamente. Por ejemplo, en los años sesenta Hawking y Penrose obtuvieron una serie de teoremas sobre la existencia de singularidad inicial (véase, por ejemplo, el libro de O'Neill[13]). La motivación está en la Cosmología, las aplicaciones también (en relación al Big Bang), pero los teoremas que obtuvieron son parte de la Matemática. La singularidad es un objeto matemático bien definido, las hipótesis del teorema están bien establecidas (*en una variedad de Lorentz con tensor de Ricci no negativo, etc,*), las demostraciones también. La Matemática tiene su propio método, basado en la precisión de los axiomas y definiciones, el rigor de los teoremas y sus demostraciones. Cualquier resultado que suponga un avance y esté formulado de este modo será de Matemática. Cualquier resultado que utilice resultados conocidos de Matemática, fáciles o difíciles, para avanzar en otra disciplina, será un resultado de dicha disciplina. Por eso podemos decir que Newton, Gauss o Hawking son matemáticos y físicos: porque han "hecho" Matemática y han "hecho" Física.

El sustantivo matemático tiene tres acepciones, pues se aplica a la persona que hace Matemática, a la que utiliza la Matemática y a la que enseña la Matemática. Frecuentemente una misma persona es merecedora de dos de los tres nombres, y existen quienes se merecen los tres. Cada vez parece más necesario que personas que conocen alguna parte de la Matemática trabajen con personas de otros ámbitos para producir avance en ellos. Es lo que se denomina *interdisciplinaridad*. El matemático, trabajando de esta forma, seguramente no hará avanzar la Matemática (no obtendrá resultados nuevos para la Matemática), pero su participación será de *cooperación necesaria* para que se puedan obtener los resultados de la otra disciplina. Seguro que ninguno de los gigantes que cultivaron nuestra ciencia en tiempos pasados se habría sentido minusvalorado por ello. En este sentido, los matemáticos tenemos una formación privilegiada, pues *las matemáticas son el alfabeto con el cual Dios ha escrito el Universo*, según decía Galileo.

**"En este sentido, los matemáticos tenemos una formación privilegiada, pues las matemáticas son el alfabeto con el cual Dios ha escrito el Universo, según decía Galileo."**

Termino. No espero que las reflexiones anteriores sean recibidas con aprobación unánime de los lectores. Lo que sí deseo es que hayan suscitado en ellos la curiosidad y el anhelo de elaborar sus propias opiniones sobre el tema.

Fernando Etayo.

Dpto. de Matemáticas,
Estadística
y Computación.
Facultad de Ciencias.
Universidad de Cantabria.

**Torre Espacio,**
***Madrid.***

*Foto por *javiermoon* (www.flickr.com)