HILBERT
Y LOS FUNDAMENTOS DE LA MATEMÁTICA

"Para Hilbert, todo problema determinado en Matemáticas admite una respuesta, bien mediante una prueba rigurosa de su solución o bien con la demostración de la imposibilidad de la misma, porque *en Matemáticas no existe el ignorabimus*".

POR FERNANDO BOMBAL

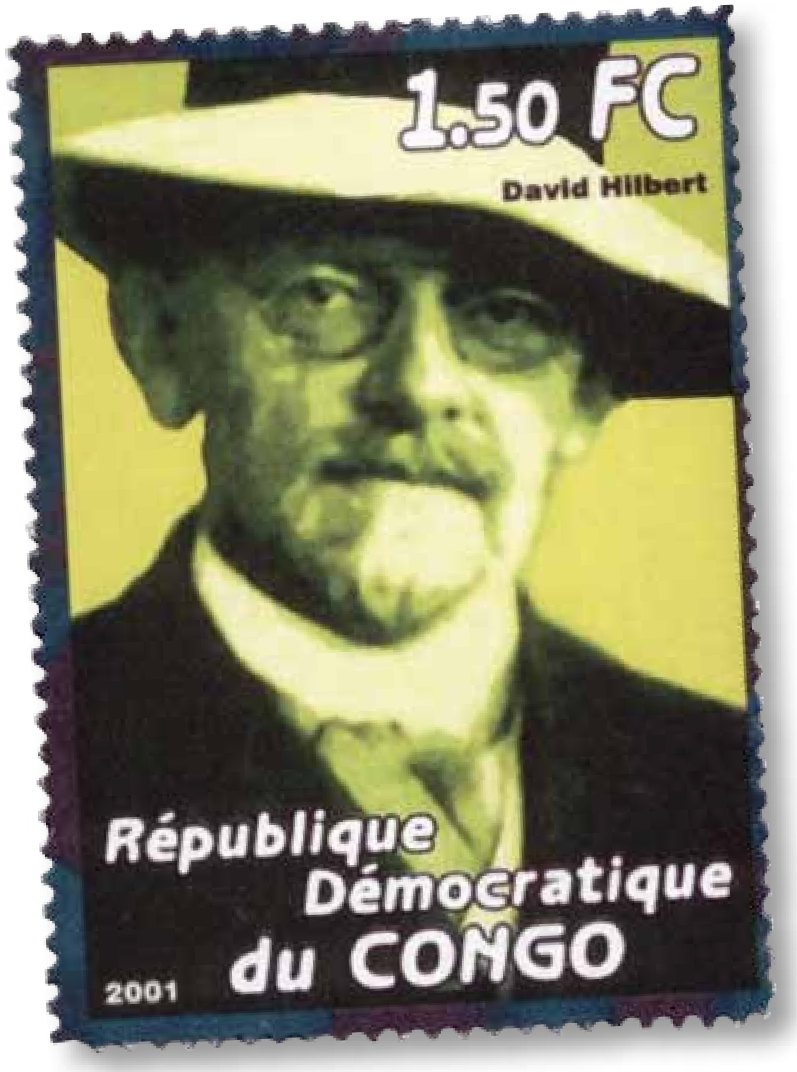
www.gopixpic.com (imagen de Hilbert)
Imagen por Robert Dickau via Wikimedia Commons (cubo de fondo)

Hilbert y los Fundamentos de la Matemática

En cualquiera de las actividades humanas aparece, de vez en cuando, una figura que marca una nueva época. Pues bien, **David Hilbert** es para las Matemáticas una de esas figuras. Nació el 23 de enero de 1862, en Wehlau, cerca de Königsberg, la capital de Prusia oriental (hoy la ciudad rusa de Kaliningrado), en el seno de una familia acomodada.

Aunque los primeros años de su carrera académica e investigadora los pasó en la Universidad de Königsberg, desde 1895 su vida transcurrió en Gotinga, la Universidad de Gauss, Dirichlet y Riemann y que, en parte gracias a la presencia de Hilbert, se convirtió en un centro de referencia mundial para las Matemáticas durante el primer tercio del siglo XX.

A lo largo de toda su vida Hilbert mostró siempre una firme e inquebrantable fe en la confiabilidad de la inferencia matemática. Para Hilbert la investigación en Matemáticas está fundamentada en la resolución de sucesivos problemas que surgen al realizarla y el objetivo de la misma es dar respuesta a los problemas planteados. Y para Hilbert, todo problema determinado en Matemáticas admite una respuesta, bien mediante una prueba rigurosa de su solución o bien con la demostración de la imposibilidad de la misma, porque *"en Matemáticas no existe el ignorabimus*[1-D]*."*



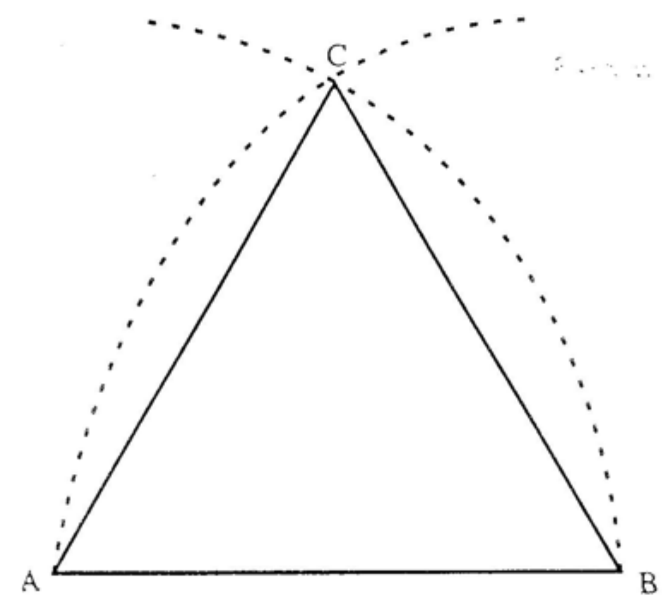
David Hilbert (1862-1943) en un sello editado en 2001 por la República Democrática del Congo.

www-history.mcs.st-andrews.ac.uk

En esta convicción o "axioma" reside el núcleo de la epistemología de Hilbert y condiciona su actividad investigadora cotidiana: Su obra se podría presentar como una serie de problemas resueltos en distintas áreas. Por supuesto, el camino para su solución no es lineal, pero hay una *unidad* subyacente en los métodos de resolución, a saber: la construcción de un marco teórico adecuado, usualmente a través del *método axiomático*, en el que se puedan desarrollar las herramientas para resolver el problema planteado. Como consecuencia, Hilbert no solamente resuelve problemas, sino que abre nuevos campos de investigación hasta entonces insospechados.

"Hilbert no solamente resuelve problemas, sino que abre nuevos campos de investigación hasta entonces insospechados".

Hilbert realizó importantes contribuciones en Álgebra, Geometría, Teoría de Números, Análisis Funcional, Física, etc. Pero el hilo conductor que está presente en toda su obra y permea toda su ingente tarea investigadora es la búsqueda del rigor y de principios generales de razonamiento, el descubrimiento de los axiomas mínimos de los que se deducen los resultados de una teoría, la utilización, en fin, del método axiomático en sentido moderno.



Construcción de triángulo equilátero.

Imagen cedida por el autor.

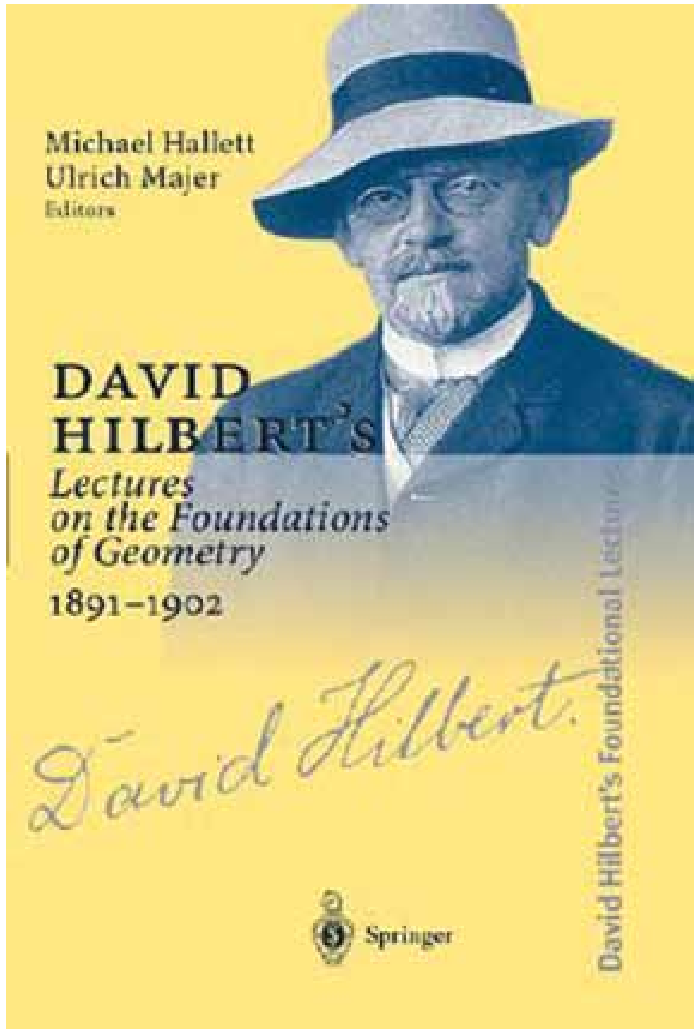
LOS "FUNDAMENTOS DE LA GEOMETRÍA"

Alrededor del 300 antes de C. Euclides había recopilado los conocimientos geométricos de su tiempo en un tratado conocido como *Los Elementos*, que se convirtió en uno de los libros más conocidos de todas las épocas. En él, a partir de unas pocas aseveraciones *evidentes* (23 *definiciones* casi intuitivas, 5 *postulados* o axiomas y 5 *nociones comunes*, afirmaciones generales del tipo "el todo es mayor que la parte", etc.) y, utilizando exclusivamente las leyes de la lógica deductiva (algunas recogidas en las *nociones* comunes, aunque la mayoría están implícitas en *Los Elementos*) se obtienen hasta 465 Proposiciones que recopilan todo el conocimiento geométrico de la época.

Durante mucho tiempo, *Los Elementos* se consideraron el paradigma del rigor en Matemáticas. Sin embargo, poco a poco se empezaron a notar algunos defectos en el majestuoso edi-

1. En 1872 el fisiólogo alemán Emil du Bois-Reymond (hermano del famoso matemático Paul du Bois-Reymond) acuñó la frase latina *ignoramus et ignorabimus* (desconocemos y desconoceremos) para designar la limitación esencial de la razón humana para conocer la Naturaleza, indicando que hay ciertas cuestiones que quedarán siempre más allá de nuestro conocimiento. Esta frase ha sido adoptada como lema por el agnosticismo moderno. A ella se refiere Hilbert en su comentario.

Hilbert y los Fundamentos de la Matemática



***Lectures on the Foundations of Geometry (1891-1902)*, David Hilbert.**

www.booktopia.com.au

ficio: los axiomas de Euclides no eran suficientes para deducir todos los teoremas incluidos en "*Los Elementos*". Por ejemplo, en la *Proposición I.1* (¡la primera del libro!), se prueba que sobre cualquier segmento AB se puede construir un triángulo equilátero. Para ello, se trazan circunferencias de centros en A y en B, de radio la longitud del segmento (lo que está permitido por los axiomas), y el punto de corte C es el otro vértice del triángulo buscado (véase la figura). Pero… ¿por qué las dos circunferencias se tienen que cortar? Nada en las definiciones, los postulados o las nociones comunes permite asegurarlo.

A lo largo del siglo XIX, en gran parte motivado por el descubrimiento de las geometrías no euclídeas[2], se renueva el interés por los axiomas de la geometría y aparecen distintas propuestas para fundamentarla con mayor o menor éxito.

En el curso 1898-99 Hilbert sorprendió a sus alumnos ofreciendo un curso sobre los elementos de la geometría. La versión escrita *Grundlagen der Geometrie* ("Los fundamentos de la Geometría") apareció en 1899 e inmediatamente se convirtió en un *bet seller*, rápidamente traducido al francés, inglés y otros idiomas.

Lo que Hilbert propuso fue un sistema simple y completo de axiomas para probar todos los teoremas de la geometría euclídea. Pero, mientras los axiomas que plantea Euclides los basa en la evidencia e intuición física, Hilbert adopta una postura bien distinta. Comenzó su curso explicando a la audiencia que las definiciones de Euclides de *punto, recta* y *plano* no tenían en realidad relevancia matemática. Lo importante es la conexión que entre estos objetos establecen los axiomas. Como dijo alguna vez "*en lugar de hablar de puntos, rectas y planos, los objetos para los que se postula la validez de los axiomas podrían llamarse mesas, sillas y jarras de cerveza*". Por supuesto que en su curso Hilbert opta por el lenguaje tradicional de Euclides. Pero se renuncia a tratar de definir las nociones primitivas: los axiomas constituyen una especie de *definición camuflada* ("*définition déguisée*" en palabras de Poincaré) o *determinación implícita* de esas nociones. El sistema de axiomas no determina de manera única los objetos considerados. Cada conjunto concreto de objetos matemáticos que verifique los axiomas constituye un *modelo* de la Geometría.

Los 20 axiomas que propone Hilbert están divididos en cinco grupos, según el tipo de propiedades que rigen: 8 de *Incidencia*, 4 de *Orden*, 5 de *Congruencia*, 2 de *Continuidad* y el *Axioma de las Paralelas*. Y tras exponer las distintas consecuencias de cada grupo de axiomas, Hilbert emprende una tarea totalmente original: el estudio de los problemas de *independencia* de los axiomas y su *consistencia* o ausencia de contradicción. Para ello utiliza sistemáticamente el método de *construcción de modelos*. Probar que el axioma X es independiente respecto al sistema de axiomas S significa que el sistema T, obtenido añadiendo a S la *negación* del axioma X, es consistente. Para ello, se construye un modelo (en una teoría más simple y segura) que verifica el sistema S de axiomas y la negación del axioma X. Así, la existencia de una contradicción en T implicaría una contradicción en las proposiciones obtenidas dentro del modelo construido, y por tanto en la teoría con la que se ha construido el modelo. De esta forma, Hilbert prueba la independencia de su sistema de axiomas y su consistencia (relativa), construyendo diversos modelos formados por números algebraicos o números reales, utilizando sus amplios conocimientos en esos campos.

Las ideas contenidas en el *Grundlagen* van a influir de manera decisiva en el devenir de la Matemática moderna. Citando a su discípulo y colega H. Weyl:

Hermann Weyl (1885-1955).

en.wikipedia.org

1. Es decir, geometrías en las que no se verifica el quinto postulado de Euclides o "axioma de las paralelas", una de cuyas versiones establece que por un punto exterior a una recta existe una y solo una recta que no corta a la dada (*paralela*). La geometría sobre una superficie esférica (interpretando las "rectas" o líneas de mínima distancia como los círculos máximos), claramente no satisface este axioma. El ejemplo no es del todo satisfactorio, pues esta geometría no satisface todos los axiomas de Euclides. Pero en el siglo XIX se construyeron ejemplos genuinos de geometrías que satisfacen todos los axiomas de Euclides, menos el de las paralelas.

Hilbert y los Fundamentos de la Matemática

"Las ideas generales (sobre consistencia e independencia) *nos parecen hoy casi triviales, tanta ha sido su influencia en nuestro pensamiento matemático. Hilbert las estableció en un lenguaje claro e inconfundible y las incluyó en un trabajo que es como un cristal: un todo irrompible con muchas facetas. Sus cualidades artísticas han contribuido indudablemente a su éxito como una obra maestra de la Ciencia*[G]*."*

LA BÚSQUEDA DE LA CERTIDUMBRE

En el texto escrito de la Conferencia de París en la que Hilbert presentó su famosa lista de los 23 problemas que, en su opinión, debieran centrar la atención de los matemáticos del siglo XX, comentando el problema número 2 ("compatibilidad de los axiomas de la aritmética"), dice:

"Estoy convencido de que es posible encontrar una demostración directa de la compatibilidad de los axiomas de la aritmética, por medio de un cuidadoso estudio y una modificación adecuada de los métodos de razonamiento en la teoría de números irracionales[D]*."*

Evidentemente, Hilbert era por entonces demasiado optimista. Se puede especular que pensaba que la consistencia de la aritmética podía obtenerse construyendo modelos a partir de la teoría de conjuntos, que había adquirido un gran desarrollo desde los trabajos pioneros de G. Cantor (1845-1918).

Desgraciadamente, entre 1895 y 1905 aparecen una serie de *paradojas* en la teoría de conjuntos. Una de ellas en particular, la llamada *Paradoja de Russell*, iba a echar por tierra el monumental sistema lógico creado por F. L. G Frege (1848-1925), considerado uno de los fundadores de la lógica simbólica. En efecto, Frege admitía que toda propiedad enunciable en el sistema definía un conjunto (el formado por los elementos que cumple esa propiedad; esta asunción había sido implícitamente aceptada por Cantor y todos sus seguidores). Si ahora consideramos la propiedad "no pertenecer a sí mismo" [3] el conjunto *U* que definiría (conjunto de los conjuntos que no pertenecen a sí mismos) es en sí contradictorio: *U* pertenece a *U* si y solo si *U* no pertenece a *U*[4]. El segundo volumen de la monumental obra de Frege *Die Grundgesetze der Arithmetik* ("las leyes básicas de la Aritmética") estaba en prensa cuando este recibió una carta de Russell en el que le comunicaba su paradoja. Frege tuvo que modificar su sistema axiomático, pero entonces muchos de los resultados del Volumen 1 quedaban en entredicho (y, por cierto, el sistema seguía siendo inconsistente, aunque Frege nunca lo supo). El caso es que Frege quedó tan afectado que nunca publicó el Volumen 3 e incluso reconoció al final de su vida que su intento de fundamentar la Aritmética en la Lógica estaba equivocado.

David Hilbert.

www.sueddeutsche.de

"Las ideas contenidas en el *Grundlagen* van a influir de manera decisiva en el devenir de la Matemática moderna".

Este hecho supuso una llamada de atención para Hilbert. No se pueden dar por supuestas sin más las reglas de inferencia, como hizo en los *Fundamentos de la Geometría*. Es preciso explicitar completamente el sistema de axiomas y las reglas de inferencia subyacentes en la demostración matemática *y probar además que este sistema completo es consistente*. Por tanto, es necesario aplicar a la lógica el mismo tratamiento que al resto de las teorías. Este es un primer esbozo de lo que iba a ser conocido como *Programa de Hilbert*.

En el Congreso Internacional de Matemáticos de 1904 en Heidelberg, Hilbert enuncia un esquema de una prueba de la consistencia de la Aritmética basada en los supuestos anteriores. Se trata del primer intento para dar una demostración de consistencia basada en la *sintaxis* y no en la construcción de modelos más básicos.

"La vuelta de Hilbert a los temas de fundamentos estaba motivada por la creciente aceptación de las teorías de Brouwer".

El trabajo fue duramente criticado por el gran matemático francés H. Poincaré.

Hilbert no respondió a las críticas de Poincaré, bien porque no tuviera clara la solución, bien porque por entonces estaba totalmente absorbido por la teoría de ecuaciones integrales.

El retorno de Hilbert al estudio de los fundamentos puede cifrarse en 1917, con la conferencia que impartió en Zurich invitado por la Sociedad Matemática Suiza, titulada *El pensamiento axiomático*, que terminaba con una rotunda declaración: *"Creo firmemente que todo lo que está sujeto al pensamiento científico cae bajo el poder del método axiomático y, por tanto, de la Matemática."* Y a continuación esboza un programa para el estudio mismo del proceso de demostración en Matemáticas.

En gran parte, la vuelta de Hilbert a los temas de fundamentos estaba motivada por la creciente aceptación de las teorías de L. E. J. Brouwer (1881-1966), que incluso había seducido a uno de sus más queridos discípulos, H. Weyl. Brouwer tenía tras sí una importante obra en la Matemática *tradicional*. Pero ya en su Tesis, presentada en 1907, había defendido un punto

1. Existen conjuntos que no tienen esa propiedad, como el de todas las ideas (que es una idea), y conjuntos que la tienen, como el de todas las sillas de una habitación (que no es una silla)
2. La versión semántica de esta paradoja es la conocida *paradoja del barbero*: En un pueblo, el barbero afeita a todos los hombres del pueblo que no se afeitan a sí mismos, y sólo a ellos. La pegunta es ¿quién afeita al barbero?

………………………………….

Hilbert y los Fundamentos de la Matemática

L. E. J. Brouwer (1881-1966).

en.wikipedia.org

de vista nada tradicional: para Brouwer, la Matemática es una actividad interior de la mente humana, que se trascribe al exterior por medio del lenguaje de la Lógica. Pero el uso automático y abusivo de las reglas de la lógica formal puede dar lugar a enunciados desprovistos de sentido y a paradojas. El lenguaje (formal o informal) no está suficientemente adaptado para expresar los experimentos mentales que realmente tienen lugar en el pensamiento matemático.

Para Brouwer, los objetos matemáticos se engendran por construcciones *efectivas* en un número *finito* (aunque arbitrariamente grande) de etapas, a partir de los números enteros positivos. En consecuencia, Brouwer y sus seguidores (la llamada *escuela intuicionista*) rechaza, por ejemplo, el principio lógico del *tertio excluso*, que afirma que, dada una proposición A, o bien A es verdadera o su negación lo es (excluyendo una tercera posibilidad).

Desde Aristóteles este principio ha sido aceptado (y utilizado) por los matemáticos, y es el fundamento de la demostración por *reducción al absurdo*: Por ejemplo, si se supone que todos los enteros verifican una cierta propiedad *P* y de ahí obtenemos una contradicción, el principio del *tertio excluso* permite deducir que existe al menos un entero que no verifica la propiedad *P*. Para Brouwer esto no es aceptable, hasta que se dé una construcción efectiva y finitaria de tal entero. Desde el punto de vista intuicionista, aceptar el principio del *tertio excluso* supone poder probar o refutar de forma efectiva toda proposición matemática. Por tanto, su rechazo supone también rechazar la tesis hilbertiana de que todo problema matemático tiene solución. Y esto era demasiado para Hilbert. Y a partir de 1922 se dedicó intensamente a reparar la tremenda mutilación que, a su juicio, supondría para las Matemáticas la aceptación de las tesis intuicionistas[5]. Así, Hilbert declara:

"Weyl y Brouwer intentan ofrecer una fundamentación de las Matemáticas que echa por la borda todo aquello que les resulta incómodo […] Al seguir a tales reformadores, nos exponemos a perder una gran parte de nuestros más valiosos conceptos, resultados y métodos". (Texto de la conferencia presentada en Hamburgo en 1922)[C].

Así que Hilbert se pone a la tarea de remediar esta situación:

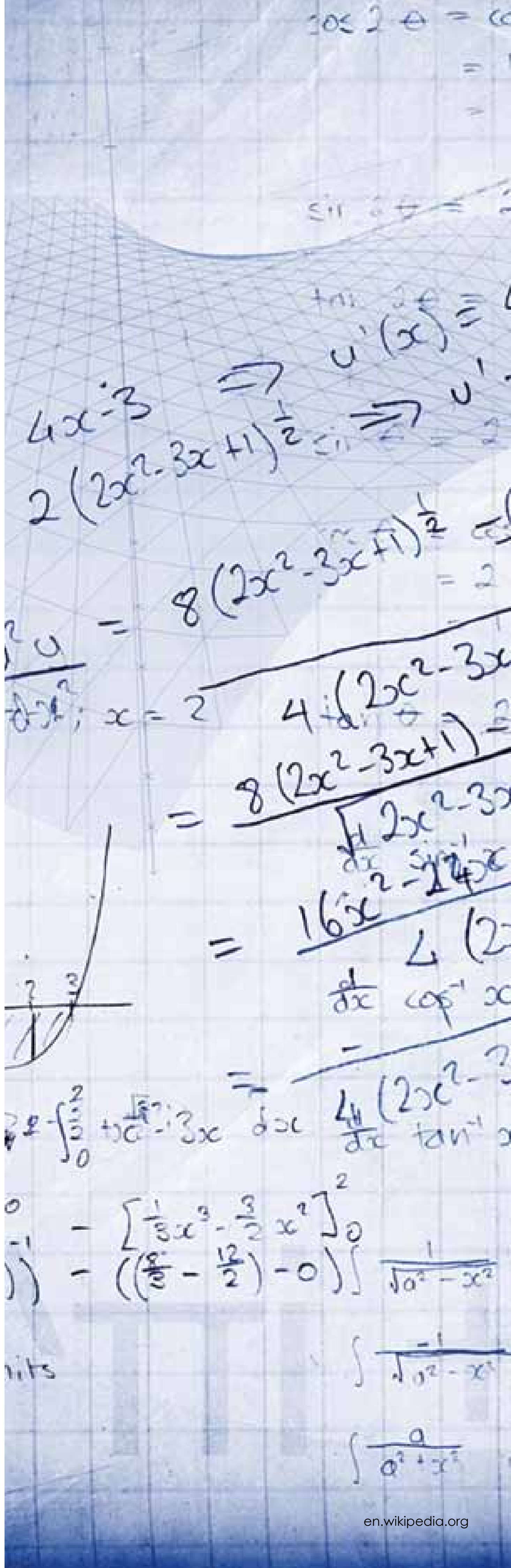
"Mis investigaciones acerca de los nuevos fundamentos de las Matemáticas tienen como propósito eliminar de manera definitiva cualquier duda en relación a la confiabilidad de la inferencia matemática […] *Una solución completa de estas dificultades requiere una teoría cuyo objeto de estudio sea la demostración matemática misma."* (*Die logischen Grundlagen der Mathematik*, Math. Annalen (1923), 151-165; traducción incluida en (ver C).

Lo que propone Hilbert con su Teoría de la Demostración (*Beweistheorie*) es...

"...dar una base firme y segura de las Matemáticas […] *que se convierten así en una especie de tribunal de suprema instancia para la evaluación y resolución de cuestiones de principio."* (Obra citada).

"Para Brouwer, los objetos matemáticos se engendran por construcciones *efectivas en un número finito* (aunque arbitrariamente grande) de etapas, a partir de los números enteros positivos".

1. En una conferencia dictada en 1927 en la Universidad de Hamburgo, Hilbert dijo: *expulsar el principio del tertio excluso de las Matemáticas es como si se quisiera prohibir al astrónomo utilizar el telescopio o al boxeador emplear sus puños.*



en.wikipedia.org

Kurt Gödel (1906-1978).

francis.naukas.com

"El año siguiente [1930], un joven docente en la Universidad de Viena, K. Gödel (1906-1978) acababa con la esperanza de Hilbert".

Para ello, Hilbert propone la *formalización* completa del sistema estudiado. Ello requiere, en primer lugar, explicitar el listado o *vocabulario completo* de signos que se va a emplear, junto con las *reglas de formación* de las expresiones válidas. A continuación, hay que especificar las *reglas de transformación* para pasar de una fórmula válida a otra. Finalmente, para comenzar la tarea, se seleccionan algunas expresiones válidas como *axiomas*. A partir de aquí, lo que pretende Hilbert es desarrollar una teoría de las propiedades combinatorias del lenguaje formal que permita hacer afirmaciones *sobre* una expresión determinada del sistema. Esta teoría la llamó Hilbert *metamatemática*. Sus enunciados son pues afirmaciones sobre los signos del sistema formal y su disposición. La demostración de la consistencia de un sistema formal dado consistiría en probar, por enunciados metamatemáticos finitistas, que nunca puede obtenerse en el sistema una fórmula y su negación.

Los signos y fórmulas que aparecen en el proceso carecen, en principio, de un significado concreto, tienen un mero valor formal (de ahí el nombre de *programa formalista*). Pero Hilbert sostiene que este juego de símbolos replica pensamientos que constituyen la práctica habitual de los matemáticos. Por tanto, no puede prescindirse nunca de las consideraciones obtenidas por la experiencia, esenciales para la elección *razonable* de los axiomas.

La larga trayectoria investigadora de Hilbert en tantos y tan diferentes campos de la Matemática y la Física muestra claramente que para él los problemas matemáticos *tienen* contenido y respuestas provistas de significado. Si llegó a propugnar una interpretación formalista de las Matemáticas fue porque estaba dispuesto a pagar ese precio a cambio de la certidumbre.

Hacia 1930 el Programa de Hilbert parecía bien encaminado, gracias a los esfuerzos del propio Hilbert y algunos de sus estudiantes, como W. Ackermann (1896-1962) y P. Bernays (1888-1977). En particular, se había podido demostrar la consistencia absoluta para el sistema de la Aritmética de los números naturales con la adición (aunque no con la multiplicación).

Sin embargo, el año siguiente, un joven docente en la Universidad de Viena, K. Gödel (1906-1978) acababa con la esperanza de Hilbert.

En un artículo que lleva el expresivo título de "*Sobre proposiciones formalmente indecidibles de Principia Mathematica y sistemas afines, I*" Gödel prueba que todo sistema formal (en el sentido del programa de Hilbert) consistente y que contenga a la Aritmética, es necesariamente *incompleto*, es decir, contiene enunciados legítimos del sistema que son *indecidibles*, esto es, ni su afirmación ni su negación son demostrables en el sistema ¡Y uno de esos enunciados es, precisamente, el que afirma la *consistencia* del sistema!

La primera reacción de Hilbert a los resultados de Gödel fue de enfado, porque los veía como un ataque frontal a su programa y, sobre todo, a su filo-

"La primera reacción de Hilbert a los resultados de Gödel fue de enfado, porque los veía como un ataque frontal a su programa y, sobre todo, a su filosofía de las Matemáticas".

gsu2ddesign.blogspot.com

sofía de las Matemáticas. No obstante, el mismo Gödel había afirmado en su trabajo que su resultado no se oponía al Programa de Hilbert, aunque más adelante no se mostró tan contundente al respecto. Lo que está claro es que los resultados de Gödel supusieron un golpe demoledor para el programa de Hilbert en su versión original. La Matemática clásica podía ser consistente (y probablemente lo era); pero su consistencia no podía ser establecida por los métodos finitarios propuestos por Hilbert.

La confianza ilimitada de Hilbert en el poder del pensamiento humano hizo que pronto comenzara a buscar soluciones al sentimiento de frustración que le provocó los resultados de Gödel.

Por un lado, tanto Hilbert como algunos de sus discípulos entendían que la idea de *demostración finitaria* del programa original no coincidía con las restricciones impuestas por los trabajos de Gödel. En otro orden de cosas, G. Gentzen (1909-1945), un alumno de Hilbert, logró probar en 1936 la consistencia de la Aritmética y distintas partes del Análisis utilizando un proceso de inducción transfinita sobre cierta clase de ordinales. Este y otros resultados indicaban la posibilidad de conseguir el objetivo propuesto inicialmente por el programa debilitando adecuadamente las restrictivas hipótesis impuestas a los métodos de demostración.

Tumba de Hilbert en su ciudad natal.
en.wikipedia.org

Hilbert todavía se dedicó intensamente al problema de los fundamentos, y también se interesó vivamente por los nuevos descubrimientos en Mecánica Cuántica. Pero realmente ya no tenía el vigor de antaño. Poco a poco, fue perdiendo memoria, creatividad e incluso interés por las Matemáticas. En 1939 Alemania invadió Polonia y estalló la Segunda Guerra Mundial. Ello significó un nuevo éxodo para los estudiantes y profesores jóvenes que aún permanecían en Gotinga. En 1942, con motivo de su 80 cumpleaños, la Academia de Berlín decidió otorgar un premio especial a Hilbert. El mismo día de la votación del premio, Hilbert se cayó en la calle y se rompió un brazo. A resultas del accidente, surgieron una serie de complicaciones que motivaron su muerte el 14 de febrero de 1943. Poco más de una docena de personas atendieron a su funeral. De Munich vino uno de sus más antiguos amigos, Arnold Sommerfeld (1868-1951), quien pronunció unas palabras glosando el trabajo de Hilbert. En su lápida se grabaron las palabras que había pronunciado en una conferencia que pronunció en Kónigsberg con motivo de su nombramiento de hijo predilecto de su ciudad natal:

Wir Müssen wissen. Wir werden wissen.
(Debemos saber. ¡Sabremos!)

Fernando Bombal

Universidad Complutense de Madrid
Real Academia de Ciencias

REFERENCIAS:

A. Almira J. M. y Sabina J. C. de Lis, *Hilbert, Matemático fundamental*. Ed. Nivola, 2007.

B. F. Bombal, *Paradojas y rigor: la historia interminable*. Discurso leído en el acto de recepción como académico de número de la RAC. Madrid, 2006. ISBN 978-84-611-7339-6

C. Hilbert D., *Fundamentos de las Matemáticas*. Selección de varios trabajos de Hilbert por Carlos Álvarez y Luis Felipe Segura. Colección Mathema. Servicios editoriales de la Facultad de Ciencias de la UNAM, México 1993.

D. Hilbert D., *Mathematical Problems*. Bull. Of the American Mathematical Society, 8 (1902), 437-479 (Versión en inglés, autorizada por Hilbert, del original aparecido en *Göttinger Nachrichten* en 1900 y en *Archiv der Mathernatik una Physik*,, 1 (1901), pp. 44-63 y 213-237).

E. Hilbert D., *Les Fondementgs de la Géométrie*. Edición crítica de la versión alemana, preparada por Paul Rossier. Dunod, 1971.

F. Reid C., *Hilbert*. 2ª edición. Springer Verlag, New York, 1972.

G. Weyl H., *David Hilbert and his mathematical work*. Bull. of the American Mathematical Society, 50 (1944), 612-654.