ESPIRALES EN LA NATURALEZA: UNA INCURSIÓN EN LA BIOMATEMÁTICA RECREATIVA

"La relación más antigua y evidente entre los organismos vivos y las Matemáticas tiene que ver con la Geometría."

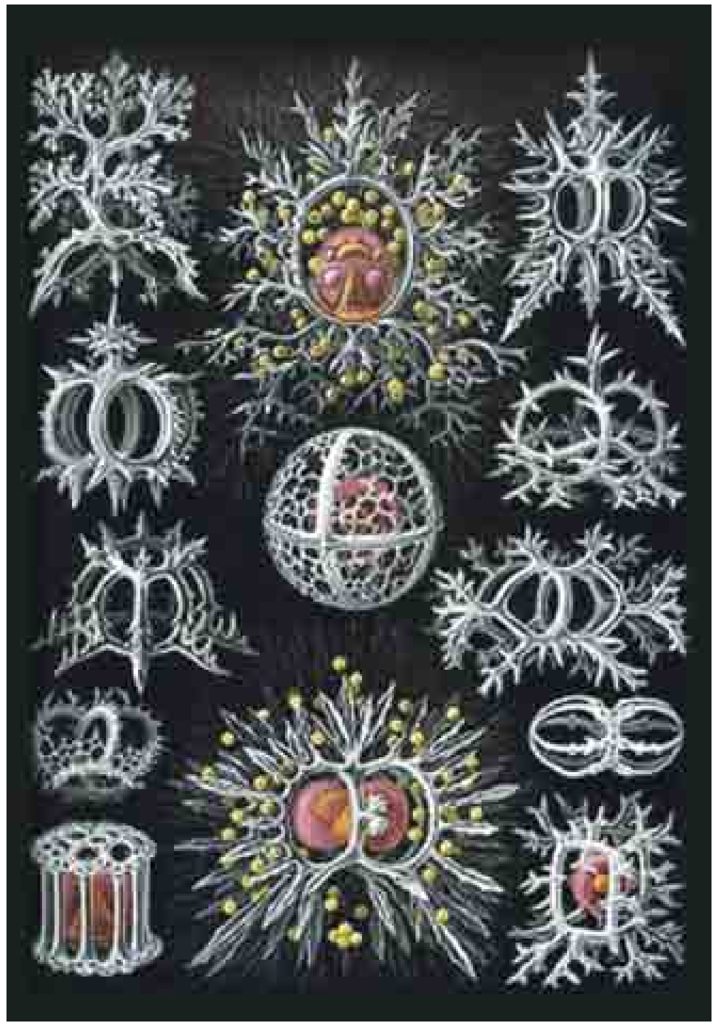
POR MARIANO GASCA

Fotografía ganadora del Premio San Alberto Magno (edición 2012).

Fotografía por Alba Pérez.

Espirales en la naturaleza: una incursión en la Biomatemática recreativa

Hasta bien entrado el siglo XX la Biología ha estado relativamente alejada de las Matemáticas, a pesar de los trabajos de Leonardo da Vinci o de Galileo entre otros. Actualmente la situación es muy distinta, y numerosas disciplinas biológicas, como la Biofísica, Bioquímica, Fisiología, Genética o Ecología, se benefician del firme apoyo de las distintas ramas de las Matemáticas. La relación más antigua y evidente entre los organismos vivos y las Matemáticas tiene que ver con la Geometría. En especial ha llamado a menudo la atención de los científicos el hecho de que muchos organismos exhiban formas geométricas más o menos regulares.



Ejemplos de radiolarios. Reimpresión de las figuras de ***Kunstformen der Natur*** **de 1904.**

Imagen cedida por el autor.

Un rasgo esencial de la mayoría de los seres vivos es la simetría. En los organismos vivos, la simetría suele ser simple e incompleta, a diferencia de lo que sucede en los minerales, cuyos cristales presentan numerosos tipos de simetría. El ejemplo del hombre, cuya simetría bilateral, como la de los demás mamíferos, es incompleta (piénsese, por ejemplo, en la posición del corazón o del hígado), es particularmente ilustrativo.

Sin embargo, la simetría no es la única propiedad geométrica que se manifiesta en los seres vivos. Algunos de ellos, de manera semejante a los cristales, presentan formas claramente geométricas, de poliedros más o menos regulares o de esferas, conos, cilindros, etc. Formas poliédricas regulares se dan en numerosos organismos microscópicos, como por ejemplo en los radiolarios (un tipo de protozoos marinos) que Haeckel ilustró con gran habilidad[1].

Pero los elementos geométricos más difundidos en la naturaleza son las curvas espirales, de las que se ocupa específicamente este artículo.

UNAS CURVAS UBICUAS

Según el diccionario de la RAE, la espiral es una "curva que da vueltas alrededor de un punto alejándose de él progresivamente". La definición matemática es mucho más compleja, para englobar a los distintos tipos de espirales: de Arquímedes, logarítmica, de Fermat, hiperbólica… Pero conviene tener en cuenta que hay además otros tipos de curvas tridimensionales, como las hélices cilíndricas o cónicas que pueden verse por ejemplo en los tornillos, que el lenguaje popular llama también espirales y lo mismo sucede en otros idiomas. Estas espirales tridimensionales son frecuentes en la naturaleza, hasta el punto de que una de sus manifestaciones, la doble hélice cilíndrica de los ácidos nucleicos, puede considerarse verdaderamente como la curva que simboliza la vida, y así la han considerado algunos autores, incluso antes de conocerse la estructura molecular de dichos ácidos.

Cardador enrollado.

Imagen cedida por el autor.

Las espirales han sido objeto de atención por parte de matemáticos y biólogos al menos desde el Renacimiento y probablemente desde mucho antes. Dos de estas curvas son especialmente frecuentes en los seres vivos, la espiral logarítmica y la espiral de Arquímedes. En esta última el radio vector que la genera se alarga regularmente en proporción al ángulo descrito. Es decir, el paso o distancia entre una espira y otra es constante. La ecuación de esa espiral en coordenadas polares es:

$$R = k\omega$$

que indica la proporcionalidad directa entre el radio vector R y el ángulo de giro ω.

Puesto que el ancho de la espira es constante, la espiral de Arquímedes puede homologarse a la forma de un tubo enrollado, como una manguera, o una cuerda gruesa. En la naturaleza aparecerá, por lo tanto, solo en formas tubulares y cilíndricas que se enrollen sobre sí mismas, como los zarcillos con que algunas plantas trepadoras se sujetan a su soporte, o como el aspecto que adoptan, de forma pasajera, las serpientes, gusanos u orugas. En puridad no son espirales de Arquímedes perfectas, pues no tienen grosor constante, pero sí aproximadamente.

No faltan en la naturaleza ejemplos claros de estas espirales. Todos hemos visto alguna vez un milpiés o cardador enrollado en posición de defensa.

1. E. Haeckel. *Art forms in Nature*. Dover P. 1974.
2. http://www.math.smith.edu/phyllo

Nummulites.

http://www-personal.umich.edu

"Los nummulites desarrollaban un caparazón calcáreo formado por cámaras idénticas, dispuestas en espiral de Arquímedes."

Otro ejemplo lo constituyen los nummulites, organismos unicelulares que se conocen en estado fósil, y que, como muchos de los animales de su mismo grupo, desarrollaban un caparazón calcáreo formado por cámaras idénticas, dispuestas en espiral de Arquímedes.

Pero en la naturaleza es mucho más frecuente otra curva espiral, la logarítmica. Se trata en este caso de una curva descrita por un punto que gira en torno a un centro mientras su radio vector se multiplica en cada vuelta por un factor constante. La ecuación de la espiral logarítmica, también en coordenadas polares es:

$$R = ke^{b\omega}$$

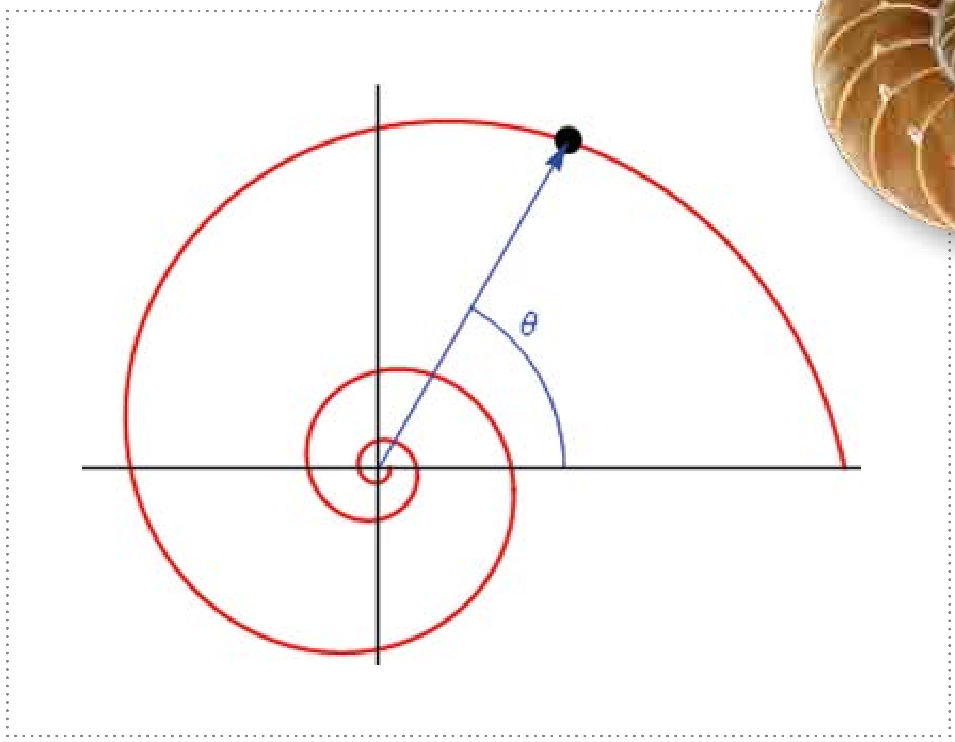
donde R y ω tienen el mismo significado que antes, y las otras constantes son factores de proporcionalidad.

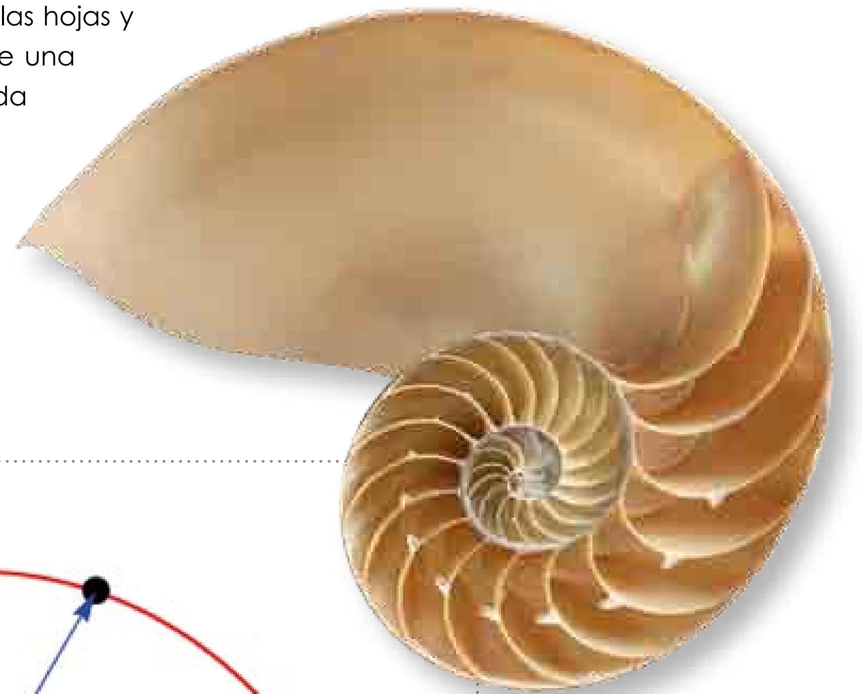
En la espiral logarítmica las tangentes en cualquier punto forman el mismo ángulo con el radio vector. Este es un rasgo de gran significado biológico, pues revela que distintas porciones de la espiral, cuando subtienden un mismo ángulo, difieren solo en el tamaño pero no en la forma. Los ejemplos de espirales logarítmicas en la naturaleza son muy abundantes porque se trata de una forma geométrica directamente ligada a los procesos de crecimiento. Por ejemplo, si un organismo se rodea de una concha protectora, cuando crece debe ocupar otra mayor, a la que pasa dejando abandonada la anterior. El proceso se repite a lo largo de sucesivas etapas de crecimiento, con cada cámara aumentada respecto a la anterior en la misma proporción. La sucesión de cámaras forma entonces una espiral logarítmica si las cámaras sucesivas se mantienen en mismo plano y, si no es así, la curva resultante es una hélice cónica. La primera es característica de algunos moluscos, como el nautilo, y de muchos foraminíferos, la segunda de la mayoría de los caracoles, de los ammonites fósiles y de los cuernos de los rumiantes que los tienen.

FILOTAXIS

Los ejemplos más variados y llamativos de espirales logarítmicas se dan en los vegetales, concretamente en la disposición de las flores en las inflorescencias, de las hojas en las ramas, de las ramas en el tronco y de las semillas en los frutos de las plantas más diversas. Al conjunto de estas disposiciones se le designa con el nombre de filotaxis, que en puridad corresponde solamente a una de ellas, la de las hojas en las ramas.

Ya Leonardo da Vinci hizo observaciones sobre las causas de la disposición de las hojas y las ramas. A medida que el tallo de una planta crece y las hojas nacen, cada hoja forma un ángulo con la anterior, pues de nacer exactamente encima de ella le privaría en parte de la luz que necesita. Lo mismo puede decirse de las ramas sobre las ramas anteriores, aunque esta exigencia es menos estricta y falta en la mayoría de las plantas. También indica Leonardo algunas de las disposiciones más corrientes. Por supuesto, no es el primer autor que se ocupa del tema, aunque los que le precedieron en la Grecia y Roma antiguas, se limitaron a indicar que en algunas plantas las hojas se disponen de manera regular. Y aunque algunos otros botánicos escribieron sobre el tema en los siglos XVI y XVII, no fue hasta mediados del siglo XVIII cuando comenzó a abordarse de forma científica.





Espiral logarítmica (izquierda) y concha de nautilo (derecha).

Imagen cedida por el autor (izquierda).

Fotografía por Alba Pérez, ganadora del Premio San Alberto Magno (edición 2012) - (derecha).

Espirales en la naturaleza: una incursión en la Biomatemática recreativa

Girasol.

http://lobuscogratis.com

Hacia mediados de ese siglo Charles Bonnet estudió la disposición de las hojas dispersas, es decir, de las que se sitúan una en cada nudo de la rama. Fue el primero que se dio cuenta de que si se unen las bases de las hojas sucesivas con un hilo imaginario resulta una curva en forma de hélice cónica. Si esta curva imaginaria se proyecta sobre el plano horizontal forma una espiral plana, y por ello la hélice en cuestión recibe el nombre de espiral genética. Proyectar la disposición de las hojas sobre un plano perpendicular al eje del tallo es un método muy usado por los botánicos para estudiar la filotaxis. No solo revela la forma espiral de la curva sobre la que se insertan las hojas, sino que también permite apreciar que, a menudo, existe más de una de estas curvas paralelas a lo largo del tallo. Estas curvas intercaladas reciben el nombre de parásticos, y al número y disposición de los parásticos se dedicará el apartado siguiente.

LA SUCESIÓN DE FIBONACCI

La sucesión de Fibonacci, formada por los números 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, etc., en la que cada número es la suma de los dos anteriores, aparece por primera vez en un problemita sobre cría de conejos del Liber Abaci de Leonardo de Pisa (Leonardo Fibonacci) en 1202. Bonnet se dio cuenta de que en muchas plantas el número de parásticos correspondía a uno de los términos de dicha sucesión, generalmente 3 ó 5. Más adelante, ya en el siglo XIX, Schimper describía plantas con mayor número de parásticos, desde 8 a 144. Estos números se manifiestan muy claramente en las cabezuelas o capítulos de plantas como la margarita o el girasol, pues en estos casos la propia inflorescencia puede asimilarse a un tallo deprimido y reducido a su proyección horizontal. Véanse por ejemplo la figura, con 34 parásticos en sentido de las agujas del reloj (dextrógiro) y 55 en contra (levógiro)[3].

La sucesión de Fibonacci se manifiesta no solo en el número de parásticos, sino también en la disposición de las hojas propiamente dicha. El ejemplo dado en primer lugar por Bonnet era el de una planta en la que la espiral genética daba dos vueltas al tallo antes de encontrar una hoja directamente sobre la primera, es decir, en la misma posición. En este recorrido había pasado por el nacimiento de otras cuatro hojas, de manera que con la inicial eran cinco las hojas que completaban un ciclo; la hoja siguiente constituía el comienzo de otro ciclo de dos vueltas y cinco hojas. Esta disposición se consigna abreviadamente como 2/5. Más tarde se describieron otras disposiciones más o menos complejas (3/5, 3/8, 2/3, etc).

En las escamas de las piñas de coníferas, en las espinas de algunos cactos (que no son sino hojas atrofiadas sobre un tallo engrosado y carnoso) o en las hojas de algunas plantas que las tienen en roseta, las espirales genéticas y los parásticos son numerosos y

"La sucesión de Fibonacci se manifiesta no solo en el número de parásticos, sino también en la disposición de las hojas propiamente dicha."

Ejemplo de filotaxis 3/8 (Globularia alypum o coronilla de fraile).

Imagen cedida por el autor.

3. http://www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/Fibonacci/fibnat.html#plants
4. R V. Jean. *Phyllotaxis: A Systemic Study in Plant Morphogenesis*. Cambridge U. Pag. 21. Press 1994
5. H.S.M. Coxeter, *Introduction to Geometry*. J. Wiley 1969 (reimp. de 1961).

Espirales en la naturaleza: una incursión en la Biomatemática recreativa

claramente visibles. Vemos unos ejemplos de piñas de coníferas en las figuras siguientes. En la primera aparece una con 8 espirales o parásticos dextrógiros y 13 levógiros, mientras que en la segunda se muestra una piña de abeto rojo (Picea abies), con 5 espirales dextrógiras (en rojo) y 8 levógiras (en azul). En esta figura, y en alguna de las que siguen, para contar las espirales en la foto hay que tener en cuenta que las primeras espirales vuelven a aparecer después de dar la vuelta completa.

En la piña tropical de la figura de la página siguiente aparecen 5 espirales azules y 8 rojas. Con frecuencia se aprecia en estas piñas una tercera familia de parásticos más verticales, 13 exactamente, más difícil de apreciar en el ejemplar de la figura.

Como se ve, los números implicados son todos términos de la sucesión de Fibonacci. Según R.V. Jean[4], en un estudio llevado a cabo en 1968, de 4290 piñas de diez clases de pinos encontrados en California, solamente 74 piñas, menos del 2%, no presentaban números de espirales de la sucesión de Fibonacci. El propio Jean, en 1992, halló que, entre 12750 observaciones de 650 especies estudiadas en 150 años de literatura sobre filotaxis, la sucesión de Fibonacci aparece en más del 92% de todos los casos de espirales.

En los años 60, el matemático Coxeter, en su libro *Introduction to Geometry*[5], incluyó un capítulo sobre Filotaxis que dio gran impulso al estudio desde el punto de vista matemático de

Piñas de coníferas.

Fotografía cedida por el autor (izquierda).
Fotografía por J. P. Martínez Rica (derecha).

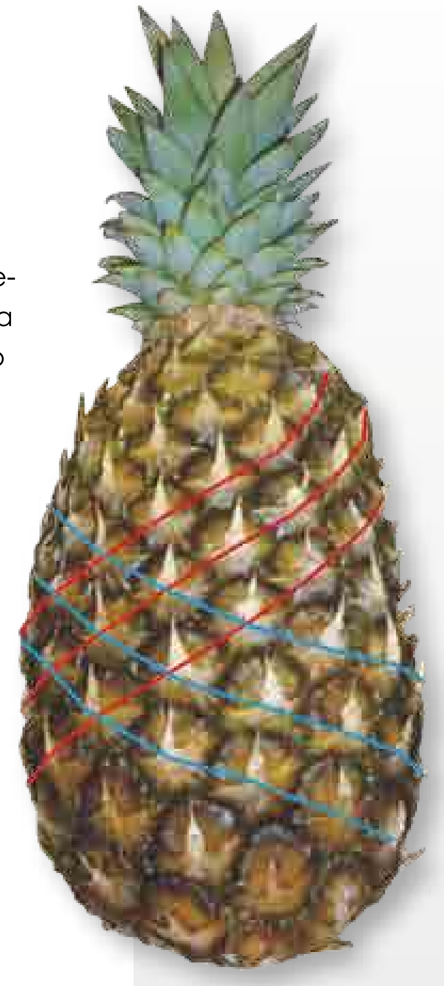
esta cuestión. En una frase muy acertada dice que "la presencia de la sucesión de Fibonacci en la filotaxis no es una ley universal pero sí una tendencia que prevalece de modo fascinante."

Vale la pena señalar que el número de pétalos, sépalos, estambres o carpelos en las flores de las angiospermas, o el número de ramas por nudo en el tronco de muchas coníferas es también un término de la sucesión de Fibonacci, o el doble del mismo. En los troncos de muchas palmeras, como en la de la figura, pueden apreciarse 5 y 8 espirales, o 3 y 5. A veces se ve una tercera familia más vertical con 13 u 8 espirales respectivamente.

La relación entre la sucesión de Fibonacci y el número áureo o proporción áurea (1.618033...) es conocida desde hace varios siglos. Lucca Pacioli mostró a finales del siglo XV las propiedades geométricas de lo que llamó "divina proporción" y Johannes Kepler años después dio su valor aproximado. Kepler ya conocía que la razón entre cada término y el anterior de la sucesión de Fibonacci tiende hacia el número áureo, al que se acerca alternativamente por debajo y por encima. Pero la prueba de que esto es así se atribuye a Simson en el siglo XVIII. El nombre de número áureo, número de oro o proporción áurea se popularizó en el siglo XIX y su valor exacto es:

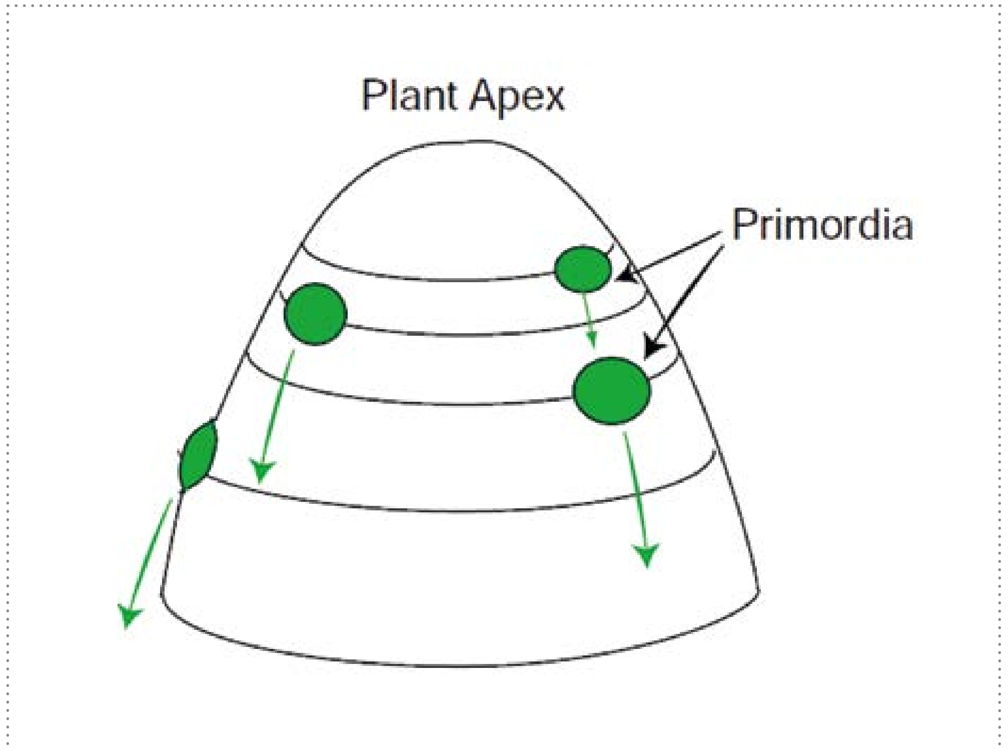
$$(1+\sqrt{5})/2.$$

Los antiguos griegos sabían dividir un segmento en dos (media y extrema razón) según esta proporción pero su uso en el arte se ha exagerado tremendamente, dando lugar a una



Piña tropical (arriba) y tronco de palmera tropical (abajo).

Fotografía por J. P. Martínez Rica (arriba).
Fotografía por Titus Tscharntke (wikipedia) - (abajo).



Primordia.

http://openalea.gforge.inria.fr

abundante mitología posteriormente desmontada[6]. Sin embargo vamos a ver su importante papel en la Naturaleza.

El hecho de que el número áureo sea el límite de los cocientes de dos términos consecutivos de la sucesión de Fibonacci hace que, salvo los primeros términos, esa sucesión pueda homologarse a una función exponencial en la que la base es el número áureo, y el exponente el número del término considerado.

Ya hemos visto que la espiral logarítmica es también una exponencial, de modo que no sería sorprendente que dicha espiral, la espiral genética de las hojas, la sucesión de Fibonacci y el número áureo estuvieran todos relacionados. Este punto se trata en el apartado siguiente, que se ocupa de las causas y factores que subyacen en la filotaxis.

Sin embargo, antes veamos qué es el ángulo áureo. El origen de la razón áurea es la división de un segmento por los griegos "en media y extrema razón". Se llama así a la división de un segmento AB con un punto C de manera que si la longitud de AC es mayor que la de CB, se tenga AB/AC=AC/CB. Ese cociente es el número áureo (1+√5)/2 o sea 1.618033…, cuyo inverso es su parte decimal, es decir 0.618033… Al dividir 360º con la misma condición sale como parte mayor el ángulo 222.492…º y como parte menor 137.507…º que se conocen como ángulo áureo (son el mismo ángulo entre dos radios de la circunferencia recorridos en sentidos contrarios).

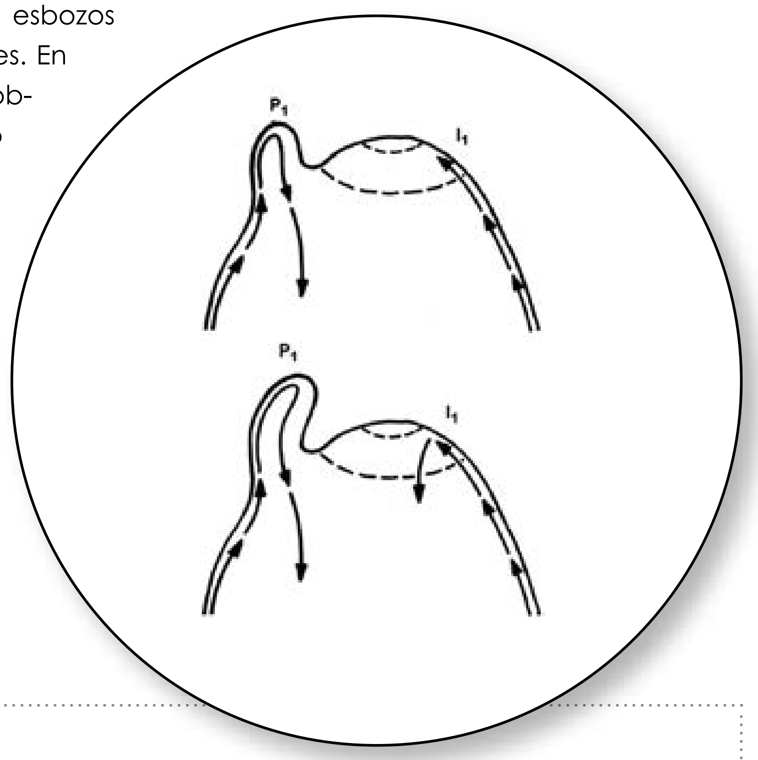
COMPETENCIA POR EL ESPACIO

Bonnet había supuesto que la filotaxis se debía a la necesidad de las hojas de disponer de más espacio para maximizar su suministro de aire. Tanto antes como después de Bonnet otros autores habían supuesto que la disposición de las hojas les permitía aprovechar al máximo no el aire, sino la luz que recibían, al evitar el hacerse sombra unas a otras. Pero estas explicaciones finalistas dieron paso, tras la aparición de la obra de Darwin, a otras de tipo causal, que buscaban la identificación de los factores físicos o químicos que provocaban esa distribución.

Las hojas se forman en el interior de las yemas. Si separamos las escamas que recubren estas encontramos un tejido embrionario, el meristemo terminal, que forma el llamado ápice terminal, en el borde del cual se encuentran y desarrollan los primeros esbozos de las hojas, los llamados primordios foliares. En 1868 el botánico Hofmeister, después de observaciones microscópicas, propuso como hipótesis que cuando se forma un nuevo primordio lo hace en la zona menos poblada del borde apical. Esto fue apoyado por evidencia experimental por Snow & Snow en 1931 y desde en-

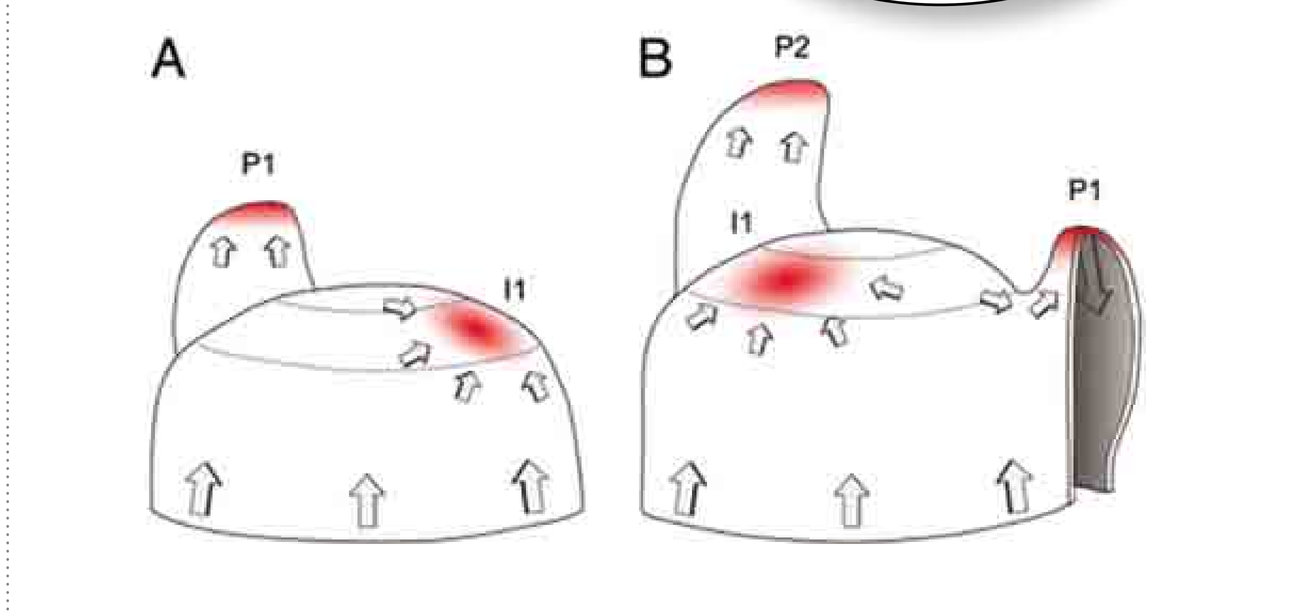
6. G. Markowski. Misconceptions about the golden ratio, http://laptops.maine.edu/GoldenRatio.pdf

7. P. Atela, C. Golé, S. Hotton, *A dynamical system for plant pattern formation: a rigorous analysis*, J. Nonlineas Sci. 12, p.641-676, 2002.



Ápice y primordios crecientes con mayor concentración de auxina.

http://www.pnas.org (arriba).
http://www.nature.com (abajo).



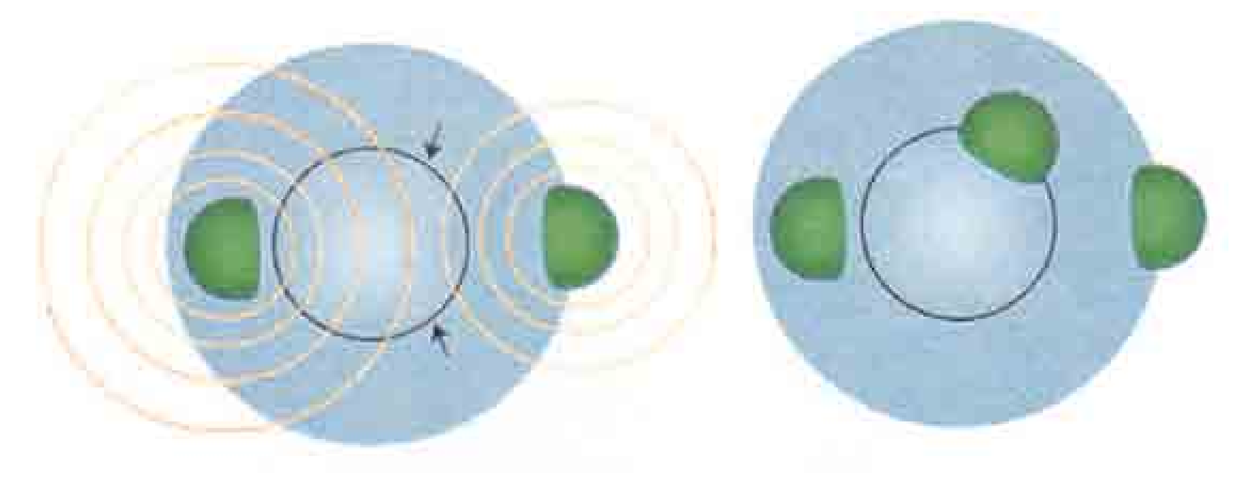
tonces es aceptado básicamente por todos los investigadores, junto con el hecho de que los primordios anteriores se desplazan radialmente hacia fuera y que los nuevos primordios se forman periódicamente, con un periodo llamado plastocrono. La aparición en el sitio más alejado de anteriores primordios sugiere un efecto inhibitorio de estos que es explicado por diversas teorías, desde químicas a biomecánicas.

Investigaciones recientes muestran que tanto el ápice como los primordios crecen merced a la mayor concentración que se da en ellos de unas determinadas sustancias, las auxinas, u hormonas del crecimiento vegetal. Imaginemos la punta cónica o hemisférica de un ápice terminal. Si en uno de sus lados aparece una mayor concentración de auxina, en ese punto el tejido crecerá y se formará un primordio foliar y así sucesivamente. Las figuras de la página anterior muestran el proceso, mientras que la de abajo muestra además el efecto inhibitorio, mayor por parte de los primordios más recientes.

El ángulo entre dos primordios consecutivos en el tiempo se conoce como ángulo de divergencia. Pues bien, cuando ya se han formado unos cuantos primordios, el ángulo de divergencia tiende habitualmente a ser el ángulo áureo mencionado en la sección anterior. La espiral que une a los primordios en orden cronológico se conoce como espiral genética, pero habitualmente no se distingue a simple vista porque no coincide con las espirales que hemos visto en piñas y girasoles. En la figura, en una roseta de Aeonium tubuliforme, y a partir de la hoja numero 1, uniéndola con las 2, 3, 4, hasta 10, etc., tendríamos la espiral genética, con el ángulo de divergencia aproximadamente el áureo. En cambio, los parásticos de contacto, que son 8 dextrógiros y 13 levógiros, pueden verse en rojo (9-17-25-33-… y 2-10-18-…) y naranja (8-21-34-… , 2-15-28-…) respectivamente. Obsérvese que el 3 no está en el parástico del 8: el anterior al 8 en su parástico sería el -5 que no ha sido numerado.

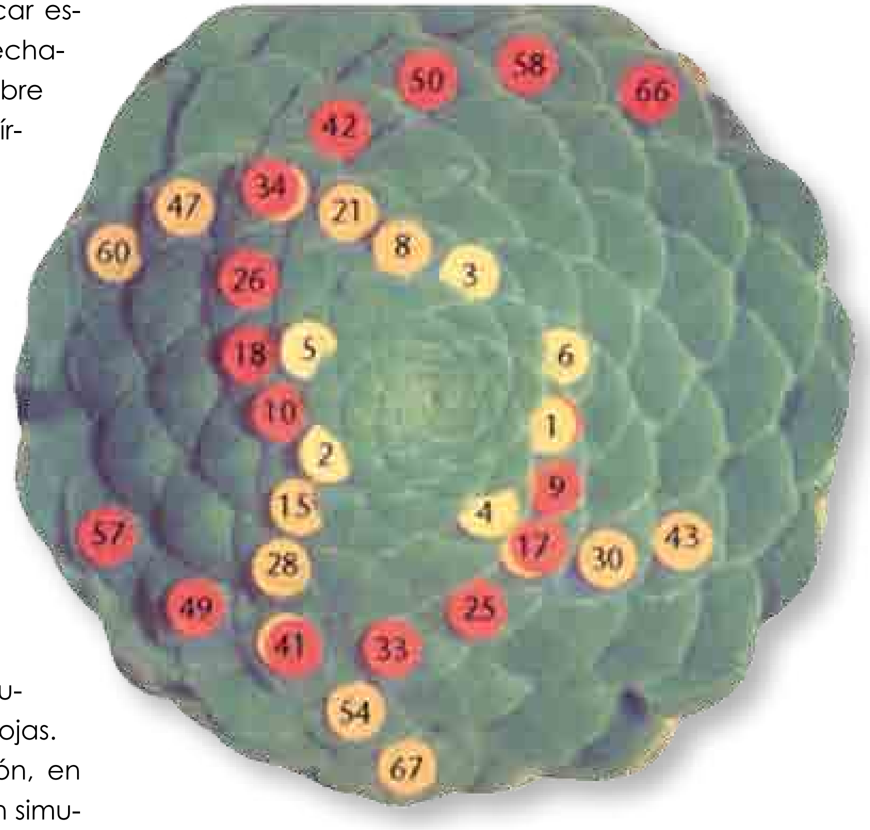
Efecto inhibitorio por parte de los primordios más recientes.

Can. J. Bot 84. 1635-1649, 2006.



Una de las teorías que intentan explicar estos procesos es la del mejor aprovechamiento del espacio. Al proyectar sobre un plano, un nuevo primordio es un círculo que ocupa un área determinada, que tiende a llenar todo el espacio disponible. Mientras esta área no se llena, otro primordio puede aparecer en la zona libre, y luego otro más pequeño en la zona libre restante. Tenemos un espacio circular donde deben alojarse muchos otros círculos más pequeños, que pueden llegar a tocarse entre sí, en cuyo momento se detiene su crecimiento.

Hay otras muchas teorías sobre las causas físicas de la disposición de las hojas. Unas se basan en modelos de difusión, en débiles campos electromagnéticos, en simulaciones físicas, modelos de ordenador, etc. En 1999, S. Hotton realizó su tesis doctoral Symmetry of plants en la Universidad de Sta. Cruz planteando un sistema dinámico discreto que refleja las hipótesis de Hofmeister y Snow[7]. Sin embargo, no existe aún una teoría universalmente aceptada.



Roseta de Aeonium tubuliforme.

http://www.els.net/WileyCDA

"Bonnet había supuesto que la filotaxis se debía a la necesidad de las hojas de disponer de más espacio para maximizar su suministro de aire. Darwin dio paso a explicaciones de tipo causal por factores físicos o químicos."

LOS MOVIMIENTOS EQUIANGULARES

La espiral logarítmica aparece también en campos de la Biología insospechados a primera vista. Dado que presenta la propiedad ya comentada de la autosemejanza, es decir, que cualquier porción de la misma es semejante en forma a otras porciones anteriores o posteriores, algunas características de esta forma permanecen constantes. Así,

8. V. A. Tucker, A.E. . Tucker, K. Akers. J H. Enderson, *Curved flight paths and sidewaysvision in peregrine falcons*. The Jour. of Exper.Biol., 203, 3755–3763 (2000).

como ya se ha indicado, en una determinada espiral logarítmica el ángulo que forma un radio vector cualquiera con la tangente a la curva en el extremo de ese radio permanece constante.

Pues bien, en la naturaleza existen muchas formas en las que se mantiene constante el valor del ángulo entre tangentes y radios vectores, y que, por lo tanto, dan lugar a espirales logarítmicas. También existen numerosos ejemplos de movimientos que se efectúan a lo largo de una trayectoria que mantiene un ángulo constante con un punto determinado. Estas trayectorias son, por lo tanto, espirales de este tipo.

El caso más conocido es el del vuelo de las mariposas nocturnas y otros insectos, que de noche son atraídos por las luces y acaban en ellas, a veces perdiendo la vida al llegar. Para explicar este movimiento se han postulado hipótesis diversas. Muy conocida, aunque no demostrada (más bien lo contrario), es la que sostiene que los insectos nocturnos vuelan siguiendo las mismas pautas de día y de noche. De día siguen una trayectoria con un ángulo constante respecto a la principal fuente luminosa, el Sol. Como este astro se halla tan lejos, los insectos siguen trayectorias rectas. De noche, la única fuente luminosa importante es la Luna, cuando se halla en la fase adecuada, o las fuentes de luz artificiales. Con respecto a estas últimas, el insecto se acerca a ellas, bien directamente, bien manteniendo un ángulo constante, como lo hace de día respecto al Sol. En este último caso sigue una espiral logarítmica que termina en el centro de la misma, es decir en la fuente de luz. Esta hipótesis es sugerente pero no ha podido demostrarse y resulta dudosa.

En estudios realizados por el biólogo V. Tucker de la Universidad Duke[8], observó que al perseguir a su presa el halcón peregrino a gran distancia y gran velocidad tiene un conflicto entre visión y aerodinámica: para ver mejor a su presa debe girar la cabeza aproximadamente 40º, lo cual perjudica su aerodinámica y ralentiza su vuelo. Para evitarlo, mantiene su cabeza recta y vuela a lo largo de una espiral logarítmica para así ver constantemente a la presa.

Mariano Gasca

Real Academia de Ciencias de Zaragoza

Miembro del Senatus Científico
Facultad de Ciencias
Universidad de Zaragoza

AGRADECIMIENTO

Agradezco profundamente al biólogo Dr. D. Juan Pablo Martínez Rica, Vicepresidente de la Real Academia de Ciencias de Zaragoza su gran ayuda en la elaboración de este artículo. A él se deben algunas de las fotografías, pero sobre todo su asesoramiento ha sido crucial en los aspectos botánico y zoológico.

"Al perseguir a su presa el halcón peregrino a gran distancia y gran velocidad tiene un conflicto entre visión y aerodinámica."

Halcón peregrino.

http://www.fotoswiki.net