Muro exterior de la Capilla parroquial de San Miguel arcángel. La Seo, Zaragoza.

Fotografía por Víctor Sola.

ZARAGOZA MATEMÁTICA

POR JOSÉ MARÍA SORANDO

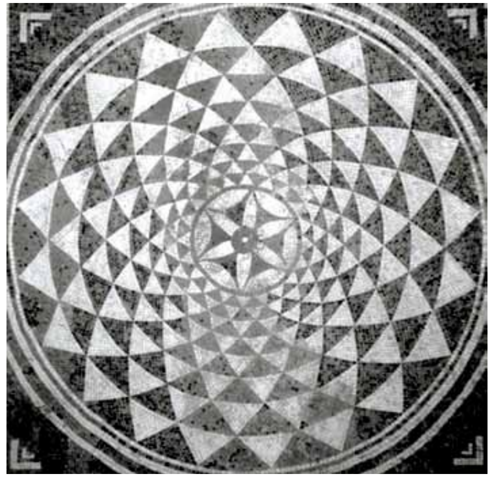
"Seguramente haré nuevos hallazgos en mis paseos ciudadanos, como espero que los hagan quienes, tras leer este artículo, hayan podido sentir la misma curiosidad."

Hay múltiples formas de recorrer y observar la ciudad, tantas como distintos intereses pueden movernos a ello. Si queremos conocer la historia y el arte locales, recorreremos sus museos y monumentos. Si el nuestro es un interés gastronómico, iremos a los restaurantes y a las barras de los bares. En este artículo será la búsqueda de la presencia matemática en la ciudad la que guiará nuestros pasos. Un buen punto de partida, donde esa presencia se hace evidente, es la fachada de la antigua Facultad de Medicina y Ciencias (hoy Paraninfo de la Universidad de Zaragoza), en cuyo extremo colindante con la Calle Dr. Cerrada luce un medallón con la alegoría de las Matemáticas. El motivo escogido es la propiedad matemática más universalmente conocida, el Teorema de Pitágoras, en su enunciado geométrico: un triángulo rectángulo sobre cuyos lados se han levantado sendos cuadrados y la igualdad que recuerda la equivalencia de áreas.

Aunque no pensemos que las mencionadas rutas histórico-artística, gastronómica o matemática son excluyentes entre sí. Baste citar que, en las salas dedicadas a la Caesaraugusta romana en el Museo de Zaragoza (Plaza de Los Sitios), vamos a encontrar un magnífico mosaico geométrico del siglo I formado por triángulos curvos entre circunferencias concéntricas que suscita al observador múltiples cuestiones matemáticas; y no se trata de un caso aislado en nuestro patrimonio. Más singular es la existencia en la ciudad de un dulce tan matemático como es el pastel de la Cincomarzada, un "cinco" hojaldrado relleno de nata. En la ciudad hay matemáticas que admirar, que pensar… hasta que comer.

Entrada principal de la antigua Facultad de Medicina y Ciencias de Zaragoza, y detalle del medallón dedicado a las Matemáticas.

Fotografía por Víctor Sola (abajo) y por el autor (arriba).



Mosaico geométrico del siglo I. Museo de Zaragoza.

Fotografía cedida por el autor.

¿Qué partes de las Matemáticas podremos encontrar en ese recorrido ciudadano? Las mismas que en cualquier texto escolar, aunque dimensionadas de forma diferente: hay mucha Geometría; también, pero menos, Aritmética; de forma esporádica, Álgebra, Funciones, Estadística, Historia de las Matemáticas; y en todas partes, aunque sin que se haga explícita la matemática subyacente, la resolución de problemas. Vayamos en su busca.

HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS

Los reconocimientos a insignes matemáticos, a través de estatuas, monumentos y dedicatorias de calles ya se citaban en un anterior artículo de conCIENCIAS[1], pero es obligado recordarlos en este.

Volvamos junto al medallón pitagórico del soberbio edificio universitario de la Plaza de Basilio Paraíso. En las fachadas norte y oeste encontraremos además, entre otros, doce medallones dedicados a matemáticos o científicos que realizaron aportaciones a las Matemáticas. Según su orden de colocación desde la puerta principal: Euclides; Hiparco; Johaness Kepler; Isaac Newton; René Descartes; Galileo Galilei; Jorge Juan y Antonio Ulloa; Abul Cassen; Gabriel Ciscar; José Rodríguez González y José Chaix; Pedro Sánchez Ciruelo, nacido en Daroca; y Francisco Artiga, nacido en Huesca. En el interior del mismo edificio se encuentran la estatua de Arquímedes y un medallón dedicado a Pedro Núñez.

Como "tributos ocultos" a las Matemáticas que florecieron en la Saraqusta musulmana: en el Parque de La Almozara, sin identificación, está el monumento a Al Mutamán; y en la zona de Universitas, tampoco rotulados, los jardines de Avempace, cuyo nombre además ostenta un instituto de Educación Secundaria en Zalfonada.

Once son las calles zaragozanas dedicadas a matemáticos. En el Barrio Oliver: Arquímedes, Nicolás Copérnico e Isaac Newton. En el Polígono de Cogullada: Claudio Tolomeo

1. Sorando J.M. Homenajes a la Ciencia en Zaragoza. ConCiencias nº 9, pp. 84 a 103. Mayo 2012. Facultad de Ciencias. Universidad de Zaragoza.

Vista aérea de Manhattan, Nueva York (EEUU).
www.wikipedia.org

y Johaness Kepler. La zaragozana Andrea Casamayor en Las Fuentes. Adoración Ruíz Tapiador, zaragozano de adopción, en Torrero. Martín Cortés, nacido en Bujaraloz, y José Echegaray en Delicias. Cerca de la Puerta del Carmen, Zoel García Galdeano, otro zaragozano de adopción. Y José Luis Rubio de Francia, zaragozano de Miedes, en Picarral-Zalfonada.

En las anteriores relaciones se encuentran 9 matemáticos de esta tierra o muy relacionados con ella. Para saber más acerca suya, se recomienda la interesante exposición "Matemáticos Aragoneses" desarrollada por el Instituto Universitario de Matemáticas y Aplicaciones (IUMA) que es accesible en linea en el portal Divulgamat (www.divulgamat.net) en su sección "Exposiciones virtuales".

Y aunque no haya voluntad de referencia matemática en su denominación, el paseante matemático no deja de encontrar en otras calles evocaciones que le son familiares, como: El límite (Casetas), Las once esquinas (Casco Viejo), Puente de La Unión (Las Fuentes – Vadorrey), Maestre Racional (Casablanca) y Mayor (Casco Viejo).

CALLES Y NÚMEROS

El trazado de las calles de Zaragoza no se distingue por seguir un orden geométrico. Se puede identificar la planta casi rectangular de la ciudad romana cruzada por las dos calles principales, trazadas sobre sus ejes de simetría[2], pero poco más. La onda urbanizadora racionalista que recorrió España tras el pionero *Ensanche* barcelonés no llegó a esta ciudad como plan integral y apenas se aprecian algunas zonas inconexas donde las calles siguen la pauta ortogonal.

El hecho de que las calles tengan dos únicas direcciones, perpendiculares entre sí, ha permitido en Manhattan su numeración correlativa, tan conocida por el cine. Así que, al saber que en el Parque Tecnológico del Reciclado "López Soriano", próximo al barrio rural de La Cartuja, hay calles numeradas, supuse que en esa reciente zona del extrarradio zaragozano encontraría el conocido plano en damero. Nada de eso. En su plano vemos, por ejemplo, que las calles Dieciseis, Diecinueve y Veintiocho son paralelas y consecutivas, estando atravesadas por la Calle Cinco; al igual que se suceden las calles Trece y Veinticinco, cortadas por la Calle Catorce. En este polígono industrial, la función ordenadora de los números ha desaparecido.

Si, perplejos, regresamos del anterior caos numérico al casco urbano, respiraremos tranquilos al constatar que la numeración de las casas dentro de una misma calle conserva la pauta conocida: acera de lo impares y acera de los pares. Pero algunos portales con doble numeración dan que pensar. Así: el nº 15 de la Calle Universidad es a la vez el nº 18 de la Calle Don Teobaldo, cercano a La Magdalena. También, el nº 23 de la Calle Prudencio es el nº 2 de la Calle Convertidos, cercano al Pilar. Está claro que se trata de casas situadas en el final común de dos calles, en el primer caso, o en el comienzo de una calle y final de otra, en el segundo caso. Pero, ¿por qué son sus numeraciones par e impar a la vez? La solución está en la pauta que se sigue en Zaragoza para la numeración de las casas de una calle. Se empieza por numerar desde el extremo de la calle más próximo a la Audiencia Provincial (Coso Alto) y, a partir de allí, la acera de la izquierda es la de los impares y la acera de la derecha es la de los pares. Así que los dos casos citados de doble numeración par-impar se explican por el particular trazado de las calles que concurren en dichas casas y la asignación de pares e impares según la norma referida.

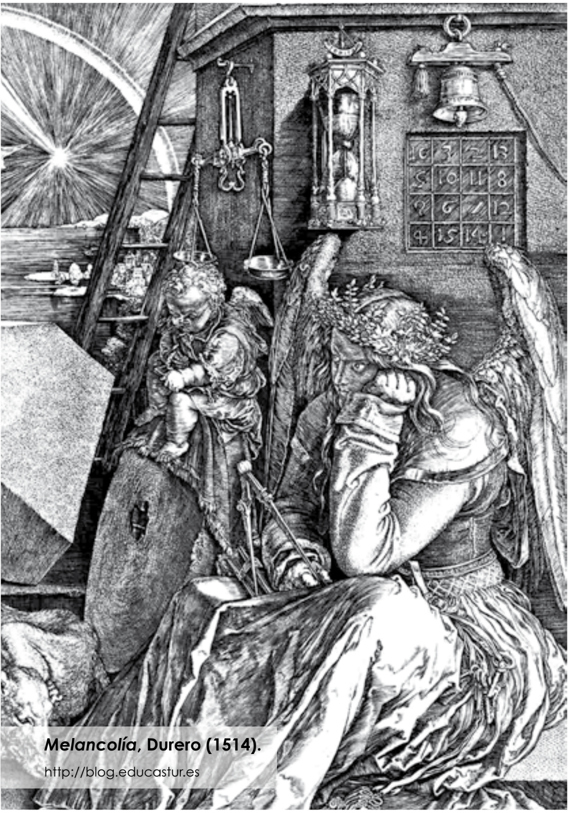
Salgamos por un momento del ámbito zaragozano y veremos que esta pauta de numeración que nos es tan familiar no es la única posible ni aplicada en otros países.

En América, las casas alcanzan números muy altos porque en cada manzana o "cuadra" comienza una nueva centena, con los pares en una acera y los impares enfrente. En Argentina, además, el número tras la centena indica la distancia al inicio de la manzana, lo cual impone que el lado de una cuadra no exceda los 100 metros. Así, el número 385 se encuentra en la tercera manzana, a 85 metros de su comienzo.

En Japón las casas se numeran por orden de antigüedad. Puede ser que el número 1 no sea el primer edificio y que tenga al lado el 26… ¡pobres carteros! Tal vez para compensarles, no son las calles las que tienen nombre, sino las manzanas, lo cual puede ayudar mucho (o no) a localizar un edificio.

"El trazado de las calles de Zaragoza no se distingue por seguir un orden geométrico. La onda urbanizadora racionalista no llegó a esta ciudad como plan integral."

2. Sorando J.M. Geometría de la ciudad. ConCiencias nº 5, pp. 30 a 39. Mayo 2010. Facultad de Ciencias. Universidad de Zaragoza.



Melancolía, Durero (1514).
http://blog.educastur.es

En Berlín, en las calles anteriores a 1929, se utiliza el *sistema de herradura*. Se comienza a numerar en una acera y cuando la calle termina se cruza de acera y la numeración continúa, regresando al extremo inicial.

NÚMEROS RELIGIOSOS

No es necesario advertir sobre la omnipresencia de los números en nuestro entorno urbano, aunque sí de algunas apariciones poco convencionales.

Un tema muy querido por matemáticos de todas las épocas, aunque también por esotéricos varios, es el de los cuadrados mágicos. En ellos, los números naturales situados en las casillas de cada fila, columna o diagonal de un cuadrado con n filas y n columnas siempre suman una misma cantidad (también en otras configuraciones). Especialmente célebre es el cuadrado mágico 4x4 que figura en la esquina superior derecha del grabado *Melancolía* (1514) de Alberto Durero, de suma 34. Josep María Subirachs, continuador de Antonio Gaudí en la construcción de la Catedral de la Sagrada Familia en Barcelona, modificó el cuadrado mágico de Durero, restando una unidad en cuatro casillas, una de cada fila y de cada columna. De ese modo consiguió un nuevo cuadrado "casi mágico" de suma 33 (edad a la que fue crucificado Jesucristo según la tradición cristiana[3]). Es "casi mágico" porque incumple dos normas de los cuadrados mágicos puros: no debe haber números repetidos (en él lo están el 10 y el 14) y los números deben formar una serie de consecutivos (en él faltan el 12 y el 16). Figura esculpido en la Fachada de la Pasión del inconcluso templo barcelonés, pero también en detalles menores del interior, hasta sumar 33 apariciones.

"Célebre es el cuadrado mágico 4x4 que figura en la esquina superior derecha del grabado Melancolía de Alberto Durero."

¿Y qué tiene que ver ese cuadrado con Zaragoza? Paseando por la rehabilitada Calle de Las Armas, frente a la Escuela Municipal de Música y Danza, hay un solar donde, por iniciativa municipal[4], tapias y fachadas han sido cubiertas por famosos graffiteros con pinturas monumentales, en un gozoso derroche de colorido. En el medianil de un edificio se ha pintado un enorme árbol (autor: Popay). En su tronco encontramos, en gran tamaño, el cuadrado mágico de suma 33.

Veremos números romanos en las lápidas de datación de monumentos y en las señales que nos dirigen hacia ellos en el Casco Histórico. Hay otros números romanos de temporada, en Semana Santa y en algunos balcones, estaciones de vía crucis penitenciales.

También encontraremos números binarios, aunque no se piense que en un establecimiento informático, sino, sorprendentemente, en El Pilar. José Manuel Chamorro, estudioso de la simbología pi-

3. Según algunos estudiosos de la cronología del Imperio Romano, entre el censo llevado a cabo durante la primera Navidad y la llegada de Poncio Pilatos a la provincia de Palestina habrían pasado 40 años, lo cual supondría que Jesucristo habría sido crucificado pasados los cuarenta.
4. El sexto asalto. 25 al 30 septiembre 2011. Web: http://asaltoproduccion.es/

Graffiti que decora una fachada de la calle Las Armas de Zaragoza, y detalle de su cuadrado mágico.
Fotografía cedida por el autor (arriba)
http://rayotes.blogspot.com.es (abajo)

Basílica de El Pilar (Zaragoza), y detalle de una de sus caras de sus cimborrios octogonales.

www.wikipedia.org (arriba)

Fotografía cedida por el autor (abajo)

larista ha descubierto[5] varios motivos de la tradición china en la Basílica. En particular, en cada una de las caras de los 8 cimborrios octogonales se repiten seis líneas de ladrillos en sobrerelieve, siempre con esta pauta: continua - discontinua - continua - discontinua - continua - discontinua. Se corresponden con el hexagrama *Wei-Chi* del antiguo tratado chino de adivinación *I Ching*, texto clásico confuciano. Simboliza la unión del Cielo y la Tierra

El sistema binario fue introducido en Occidente por G.W. Leibnitz, en su artículo *Explication de l'Arithmétique Binaire* (1703). En él menciona los símbolos binarios usados en la cultura china, citando *I Ching*. De modo que el hexagrama que aparece 64 veces en El Pilar es el número binario 101010. Si lo pasamos al sistema decimal, obtenemos:

$$1{*}2^5 + 0{*}2^4 + 1{*}2^3 + 0{*}2^2 + 1{*}2^1 + 0{*}2^0 = 42$$

El 42 posee varios significados dentro de la tradición judeocristiana que explica el autor. No profundizaremos en ello por ser ése otro terreno, la Numerología, que no debe confundirse con la Matemática, pero sí ha parecido relevante señalar ese curioso hallazgo.

"También encontraremos números binarios, aunque no se piense que en un establecimiento informático, sino, sorprendentemente, en El Pilar."

Escribe Chamorro: "*Esta sorprendente presencia de estos signos chinos en El Pilar, pudiera ser debida a la influencia del Abad del Císter Juan Caramuel y la Orden Jesuítica, particularmente del P. J. Jacobo Kressa, catedrático de matemáticas del Colegio Imperial de Madrid, y que en el año 1696, a instancias del Conde de Perelada, desempeña la peritación de las obras de construcción de la Basílica. Advirtamos que de forma coetánea a la fecha de construcción del Pilar, siglo XVII - XVIII, (el día del Apóstol Santiago del año 1681 se puso la piedra fundacional del nuevo Templo), se despliega la influencia de la Compañía de Jesús en China, y sus intentos de traducción de los conceptos Metafísicos, Religiosos, Cosmológicos, con los consiguientes intercambios culturales*".[6]

Y para terminar este apartado, otra perplejidad a propósito de números y templos. La iglesia de Santa Engracia alberga el Santuario de los Innumerables Mártires. Es esta una denominación muy poco matemática. Un conjunto se dice numerable cuando se puede establecer una aplicación biyectiva entre sus elementos y los números naturales o una parte de ellos. No son numerables, innumerables por tanto, los conjuntos infinitos de orden mayor, como son los números reales. Pero sabido es que en el lenguaje común "innumerable" es sinónimo de muy numeroso, así que no pensemos en un imposible conjunto continuo de mártires. Y ¿cuántos eran esos innumerables mártires? La historia nos dice que dieciocho. Sin la precisión del lenguaje matemático, se ha caído en la devota exageración.

5. Chamorro J.M. Varios artículos en Monográfico sobre la Basílica del Pilar. Web de la DPZ. On line: http://www.dpz.es/turismo/monograficos/pilar/pilar.asp
6. Chamorro J.M. El Pilar o Axis Mundi en Monográfico sobre la Basílica del Pilar. Web de la DPZ. On line: http://www.dpz.es/turismo/noticias/2005/img/axismundi.pdf

ÁNGULOS Y ESTRELLAS

La arquitectura urbana está dominada por la ortogonalidad, con ángulos rectos por doquier. Cuando encontramos ángulos agudos u obtusos en las construcciones, dotan a estas de singularidad. Hay tres torres o mástiles que por razones diferentes se elevan al cielo desviándose de la habitual dirección vertical:

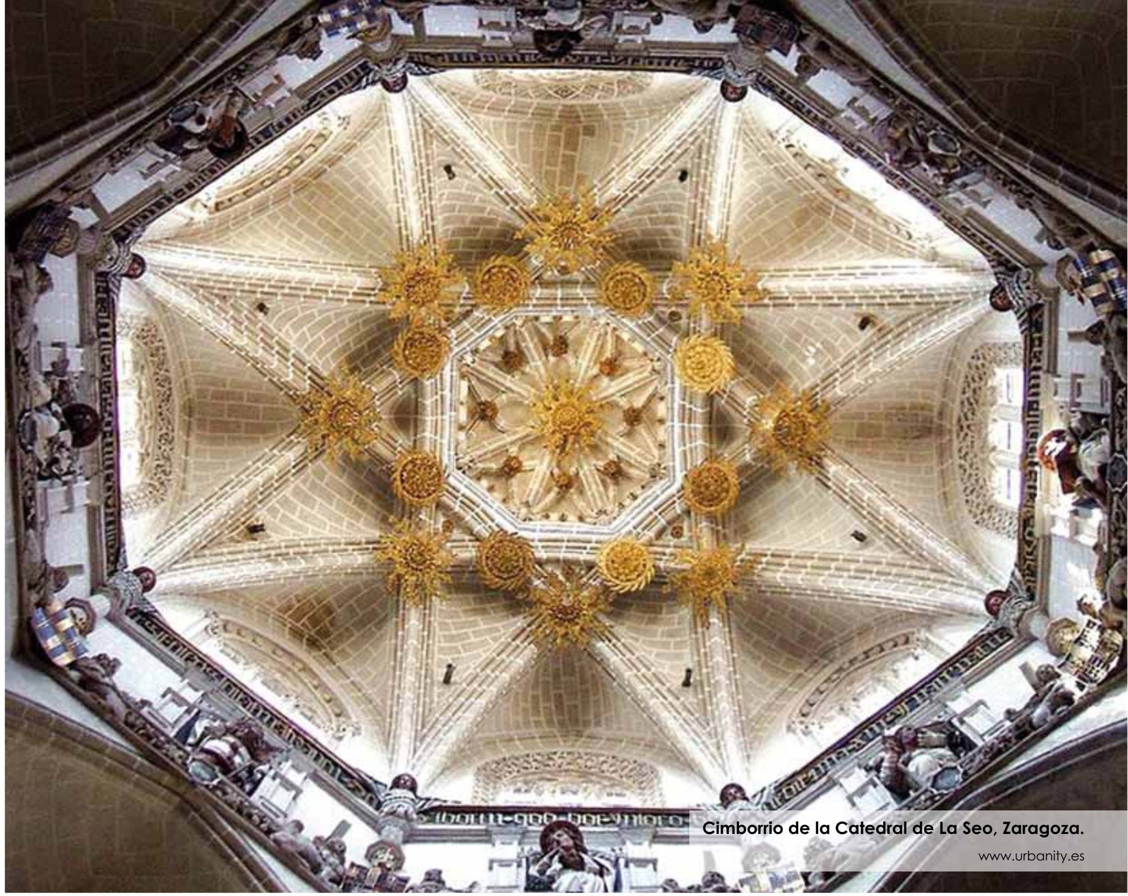
- La torre de la iglesia de San Juan de los Panetes (s. XVIII), cuya desviación sobrevenida es de 3º, la misma que tiene la Torre de Pisa.
- El mástil de la Pasarela del Voluntariado (2008), obra de Javier Manterola, que por decisión de diseño se desvía 30º de la vertical, contrapesando el tablero curvo que soportan sus 46 tirantes.
- El gran gnomon del reloj de sol de Vadorrey[7] (2010), obra de Juan Antonio Ros, el más grande del mundo, cuya inclinación (necesaria para su función) es de 47º 37' 48".

Un sencillo pasatiempo matemático para el paseante es la estimación de dichos ángulos *in situ*, mediante trazado de visuales y cálculo trigonométrico sencillo.

El paseo tranquilo y atento por la ciudad nos descubre, además del omnipresente rectángulo, otros polígonos en fuentes, iglesias, monumentos y edificios con estilo, siempre con una función ornamental. Un tipo especial son los polígonos estrellados.

Volviendo al Museo de Zaragoza, encontramos otro mosaico del s. I con dos cuadrados entrecruzados, usual en las villas romanas. Se puede interpretar como el resultado de unir los vértices de un octógono regular de 2 en 2, por lo cual es llamado *estrella* (8 , 2).

Mosaico del s. I con dos cuadrados entrecruzados. Museo de Zaragoza.
Fotografía cedida por el autor.



Cimborrio de la Catedral de La Seo, Zaragoza.
www.urbanity.es

Si sentados frente al altar mayor de La Seo (s. XV) elevamos la vista al espléndido cimborrio gótico veremos una hermosa estrella dorada, obtenida al enlazar los vértices del octógono regular de 3 en 3, la *estrella* (8, 3). Al salir a la plaza frente a la catedral, miremos bajo nuestros pies: en su gran mosaico veremos la misma *estrella* (8, 3), repetida cinco veces en mármol negro.

Es fácil observar que coinciden las estrellas (8, 2) y (8, 6); asimismo coinciden las estrellas (8, 3) y (8, 5). ¿Encontraremos en la ciudad la *estrella* (8, 4)? No hay que ir muy lejos para ello. Está en las forjas de las puertas de El Pilar, aunque disimulada por símbolos marianos.

"Si sentados frente al altar mayor de La Seo (S. XV) elevamos la vista al espléndido cimborrio gótico veremos una hermosa estrella dorada."

7. Reloj que tiene su propio blog: http://relojvadorrey.blogspot.com.es/

Forja en una de las puertas de El Pilar de Zaragoza.
Fotografía cedida por el autor.

Resulta curioso el aprovechamiento a través de los siglos de una sencilla idea geométrica con fines estéticos. Las estrellas citadas, aunque con un proceso constructivo similar, corresponden a figuras bien diferentes: polígonos o segmentos entrecruzados en unos casos, recorrido íntegro de los vértices del polígono en otro (8, 3). Propiamente, se llama polígonos estrellados a los de este último tipo, cuando se regresa al vértice de partida tras recorrer todos los demás. Es sencillo comprobar que en un polígono regular de n lados, la *estrella* (n, m), con 1 < m < n-1, es un polígono estrellado si y solo si n y m son primos entre si.

MOVIMIENTOS Y TESELACIONES

Las decoraciones de fachadas, suelos y techados en los espacios y edificios más destacables de la ciudad se basan muy a menudo en la repetición de uno o varios motivos mediante movimientos en el plano: traslaciones, giros y simetrías. Se pueden encontrar en materiales diversos: por ejemplo, en los yesos, ladrillos y azulejos de nuestras iglesias mudéjares (siglos XIV a XVII); o en las forjas de los balcones de las casas construidas por la burguesía acomodada, a finales del XIX y comienzos del XX.

El gusto por la simetría parece tener una base genética[8] y se puede apreciar en la construcción de algunos entornos monumentales. Por ejemplo, en el Parque Grande "J. A. Labordeta", al divisar el central Paseo de San Sebastián, tanto desde el Puente Trece de Septiembre sobre la Huerva como desde el Batallador, en el Cabezo de Buenavista. Árboles, fuentes, bancos, caminos, jardines... todo se dispone en simetría axial; mientras que en la Glorieta de Neptuno rige la simetría de giro hexagonal.

Sin embargo, en ocasiones topamos con alguna simetría fallida. Situémonos en el centro de la Calle Alfonso I, mirando hacia El Pilar. La mirada descuidada tiende a valorar esta como una simétrica panorámica "para turistas" (no faltarán algunos haciendo la obligada foto). Pero, con más atención, en seguida se observa que el blanco relieve "Venida de la Virgen" (1969) de Pablo Serrano está centrado con la calle, pero el tejadillo de la basílica sobre él está desplazado hacia nuestra izquierda y el gran cimborrio central todavía más.

Cuando los movimientos de una o varias figuras llenan el plano, estamos ante una teselación, objetivo geométrico y artesanal con larga tradición. Si las losetas son poligonales, según su forma y variedad, así como la uniformidad o diversidad de tipos de vértices, las teselaciones pueden ser regulares (hay 3 tipos), semiregulares uniformes (8 tipos), semirregulares no uniformes (7 tipos) e irregulares (infinitos tipos).

Los grupos de transformaciones que dejan invariante una figura plana y permiten con ella llenar el plano infinito, son llamados grupos de simetría. En Zaragoza disfrutamos de algunos ejemplos magníficos en el Arte Mudéjar, por ejemplo: las celosías del ábside de la iglesia de San Miguel de los Navarros, la torre de La Magdalena o el esplendoroso muro de La Parroquieta de La Seo. Fedorov demostró

8. Pape Moller A. La Naturaleza prefiere la simetría. Mundo Científico 187, pp. 48 a 53. 1998.

Calle Alfonso I, Zaragoza.
Fotografía por Víctor Sola.

(1891) que los grupos de simetría posibles son 17. Los profesores Ramírez y Usón[9] los han localizado todos en el mudéjar aragonés, 16 de ellos en la capital.

CURVAS

Cuando observamos curvas conocidas (circunferencias, elipses, sinusoides, etc.) en elementos arquitectónicos de la ciudad, estamos ante una presencia, además de geométrica, también algebraica. La Geometría Analítica permite estudiarlas no sólo como figuras con propiedades métricas, sino también como ecuaciones. De modo que en esos casos hay una presencia implícita del Álgebra.

Al cruzar un puente, bastantes veces lo estamos haciendo sobre o bajo una parábola… o casi. Así ocurre en 5 de los 10 puentes sobre el Ebro a su paso por el casco urbano de Zaragoza. ¿Por qué "casi" una parábola? Porque en realidad la curva que tanto se repite en los puentes es la catenaria invertida, muy parecida a aquella.

Ambas curvas se corresponden con propiedades físicas. La parábola es la trayectoria que sigue un cuerpo sobre el que actúan una fuerza o impulso inicial y la acción constante de la gravedad (tiro parabólico), como es visible, por ejemplo, en la curva que traza el agua en los surtidores de nuestros parques. La catenaria es la curva que describe una cadena sostenida por sus extremos, también bajo la acción de la gravedad. La confusión entre ambas curvas es usual y explicable. El desarrollo en serie de Taylor para la catenaria nos da como aproximación polinómica de la misma en el entorno del cero, una función cuadrática (parábola) más un infinitésimo de orden 4. Realmente la diferencia entre ambas es pequeña.

Espiral en la Iglesia de Santa Isabel de Portugal, Zaragoza.

Fotografía cedida por el autor.

La razón que justifica la elección de la catenaria para soportar el peso del tablero de los puentes es que minimiza las tensiones, distribuyendo el peso uniformemente y evitando esfuerzos tangenciales por tracción o compresión. Así ocurre, por ejemplo, en los arcos bajo el Puente de Santiago o sobre el Puente de Hierro. Y es esa propiedad la que explica que se impusiera dicha curva como forma de la espina dorsal de los dinosaurios, pues repartía el peso de sus enormes cuerpos sin quebrarla.

No es la utilidad, sino el simbolismo lo que explica la repetida presencia de espirales en las iglesias, ya que se asocian con la Resurrección. El matemático suizo Jakob Bernouilli hizo grabar en su tumba una espiral con la leyenda *"Eadem mutata resurgo"* ("aunque transformada, resucito"). En la espiral arquimediana, el radio va creciendo de giro en giro siguiendo una progresión aritmética; mientras que en la espiral logarítmica sigue una progresión geométrica.

Se puede construir una espiral con cuadrantes de circunferencia cuyos radios sigan la Sucesión de Fibonacci (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13…). El cociente entre cada término y el anterior tiene como límite el "número de oro" phi (1,61803398…), de modo que dicha espiral se va aproximando a una espiral logarítmica con razón phi. Es la espiral áurea.

La iglesia zaragozana que muestra mayor abundancia de espirales es la de Santa Isabel de Portugal (s. XVIII), cuyo nombre más popular es San Cayetano. En su barroca fachada de mármol y alabastro encontramos dos grandes espirales arquimedianas, a ambos lados de la estatua dominante de la santa, y muchas espirales áureas de menor tamaño, repartidas por la fachada.

9. Ramírez A. y Usón C. Rutas matemáticas III. El Mudéjar. Servicio de Educación. Ayuntamiento de Zaragoza. En línea: http://www.zaragoza.es/cont/paginas/educacion/pdf/rutasmudejarprof.pdf

Detalle de la fachada de La Seo de Zaragoza.

Fotografía cedida por el autor.

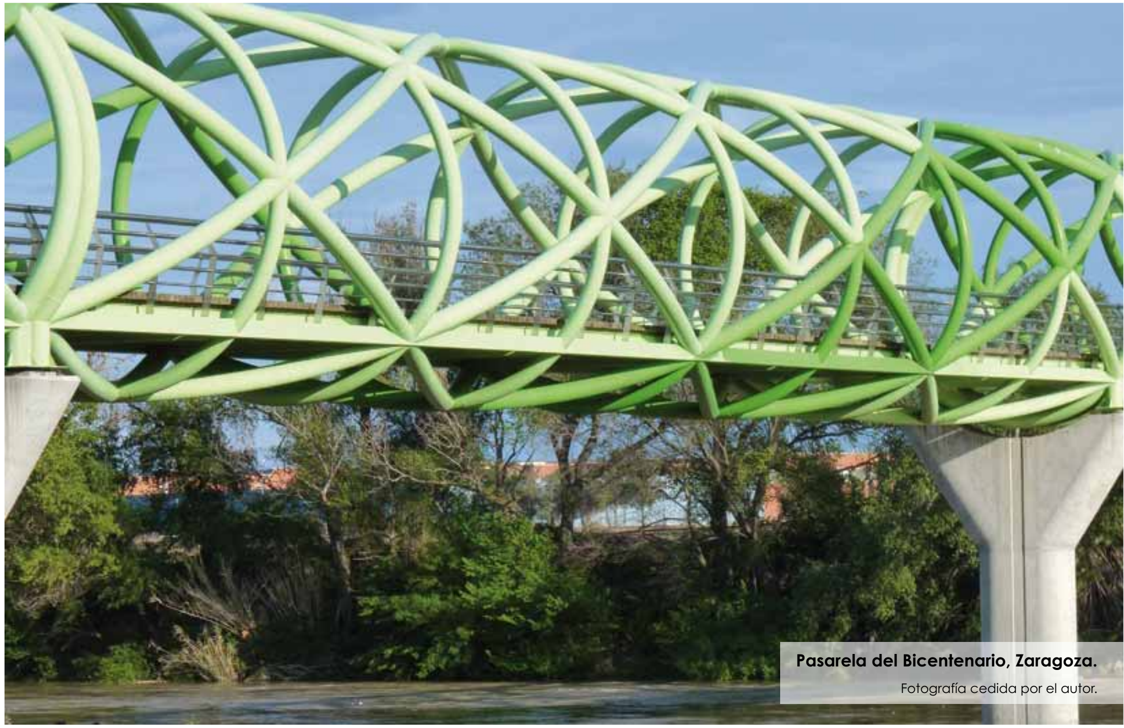
Diríase que la hélice es el paso de la espiral a las tres dimensiones. En realidad, es una curva tridimensional cuyas tangentes forman un ángulo constante con una dirección fija. En las columnas salomónicas a la entrada de la Iglesia de San Felipe vemos dos hélices cilíndricas. En la Plaza de la Atalaya del Parque Lineal de Plaza se encuentra un moderno zigurat metálico cuya barandilla dibuja una gran hélice cónica.

El puente sobre el Ebro más reciente y menos conocido, por ser el más alejado del centro urbano, es la Pasarela del Bicentenario (2008), con diseño de Luis Javier Sanz Balduz, que une el barrio rural de La Cartuja y el término de La Alfranca en Pastriz. Su estructura es matemática: circunferencias iguales en planos paralelos, entrelazadas por hélices cilíndricas. Cruzar la pasarela nos introduce en el cilindro imaginario sobre el que discurren esas curvas y nos envuelve en un juego múltiple de intersecciones.

SUPERFICIES Y CUERPOS

Cuando una recta generatriz se desplaza apoyándose sobre una recta o curva directriz, perpendicular al plano que contiene a esta, se genera una superficie reglada. Si se apoya sobre dos directrices, es una superficie doblemente reglada. Los arquitectos aprecian y utilizan este tipo de superficies porque con ellas es posible lograr airosas cubiertas y fachadas curvas construidas, fácilmente, con vigas. Fueron exploradas por Gaudí y en su construcción con hormigón destacaron Eduardo Torroja y Félix Candela. En Zaragoza podemos ver varias: la Torre del Agua, el cilindro parabólico en un ático del Paseo Sagasta o la cubierta de la Estación de Cercanías de Goya (doblemente reglada). Pero la más vistosa y repetida de todas ellas es el paraboloide hiperbólico o silla de montar.

"En la Plaza de la Atalaya del Parque Lineal de Plaza se encuentra un moderno zigurat metálico cuya barandilla dibuja una gran hélice cónica."



Pasarela del Bicentenario, Zaragoza.
Fotografía cedida por el autor.

Zigurat en el Parque Lineal de Plaza, Zaragoza.
Fotografía cedida por el autor.

Vemos paraboloides hiperbólicos, por ejemplo: en la cubierta de la Iglesia de Marianistas, obra de J. Yarza García y J. Yarza Nordmak (1967); en las pérgolas de los merenderos en las riberas del Ebro; o también en el Parque del Tío Jorge. Se pueden generar de dos formas: cuando una recta generatriz se desliza sobre dos rectas directrices que están en planos paralelos y tienen pendientes opuestas; también, cuando una parábola generatriz se desliza sobre otra parábola directriz, teniendo ambas distintos sentidos de concavidad-convexidad.

El ortoedro es el cuerpo geométrico que domina la ciudad. Esa uniformidad solo es rota por otros poliedros y cuerpos de revolución presentes en plazas y monumentos, rara vez en edificios. Algunos ejemplos: el Monumento a la Constitución con su esfera y tres pirámides oblícuas, el edificio cilíndrico de la Plaza de San Blas o las construcciones poliédricas del Edificio Aramón en el Parque del Agua, del Museo IAACC o del grupo escultórico bajo el Puente de la Unión.

Cuando todas las dimensiones del ortoedro son coincidentes, tenemos un hexaedro o cubo, bastante presente en la ciudad: en la Avenida de Ranillas, en la Plaza Eduardo Ibarra, en la Glorieta de IberCaja, etc. Dos son los más famosos “cubos” de la ciudad: los supuestos cubos de La Seo y de Urbanismo.

La primera mirada al edificio de entrada al Foro Romano en la Plaza de La Seo revela la inexactitud de esa obstinación de los periodistas (fue polémica su construcción) en llamarlo “cubo”; es un prisma cuyas bases son rombos.

El otro “cubo” está vecino a La Romareda y despierta dudas. Sus caras acristaladas presentan 8 celdas de anchura y 9 de altura, lo cual lleva a una primera conclusión: no son cuadradas y no estamos ante un cubo. Pero al razonar así estamos asumiendo que esas celdas son cuadradas. ¿Y si no lo fueran? La forma de salir de dudas es tomar medidas (mejor sobre la foto, si no amamos el deporte de riesgo). Al hacerlo, descubrimos que esa fachada sí es cuadrada. Y entonces, ¿las medidas 8x9? La explicación es que las celdas no son cuadradas y que su anchura mide 9/8 de su altura. De ese modo, si tomamos como unidad la altura de una celda, las dimensiones de la fachada son: 9 de altura y 8x9/8 = 9 de anchura.

El poliedro más hermoso de la ciudad domina la Plaza de Europa desde las tres grandes torres de iluminación, pero también en las doce pequeñas columnas que alrededor del obelisco recuerdan la bandera de la Unión Europea. Se trata de la Stella Octangula que fascinara a Kepler, composición en macla de dos tetraedros invertidos, cuyas caras son triángulos equiláteros iguales. A la vista de su perfección, nos preguntamos cómo no forma parte de la conocida serie de los sólidos platónicos o poliedros regulares. La razón es que en estos todos los vértices deben recibir iguales números de aristas y de caras. En la Stella Octangula los hay de dos tipos.

¿Es posible con poliedros cubrir el espacio como vimos que lo es con polígonos teselar el plano? En los parques infantiles y almacenes de la ciudad veremos la solución más simple: el apilamiento de cubos o de ortoedros. En otras estructuras (tejadillo en la entrada de la Delegación de Hacienda, por ejemplo) se consigue combinando tetraedros con pirámides cuadrangulares.

“El Cubo” anexo al Estadio de La Romareda, Zaragoza.

OTRAS PRESENCIAS

La resolución de problemas ciudadanos, aunque no visible, tiene sin duda una base matemática. Por ejemplo: en la coordinación y priorización de semáforos; en la logística del servicio de bicicletas municipales; en la elección de la forma de los contenedores maximizando volumen sin ocupar más superficie, etc.

A los amantes de la Estadística les recomiendo un paseo por la orilla izquierda del Ebro, desde el azud hacia la desembocadura del Río Gállego. Encontrarán un grupo escultórico con varias campanas de Gauss.

También la Topología hace aparición en el grupo escultórico *Creación* de John Robinson, frente al Edificio de Matemáticas en el Campus de San Francisco, del que ya se habló en un artículo anterior[1]. Habíamos empezado el paseo en un rincón universitario y lo terminamos en otro.

Uno de los tres poliedros que dominan la Plaza de Europa, en Zaragoza.

Fotografía cedida por el autor.

Escribía Descartes en el epílogo a su tratado *La Geometría* (1637): “*Espero que los lectores me estarán agradecidos, no solamente por las cosas que he explicado aquí, sino también por las que he omitido intencionadamente a fin de dejarles el placer de descubrirlas*”. Quedan muchas más matemáticas que descubrir en nuestra Zaragoza, pero no puedo decir como Descartes que las haya omitido a conciencia. Seguramente haré nuevos hallazgos en mis paseos ciudadanos, como espero que los hagan quienes tras leer este artículo hayan podido sentir la misma curiosidad. Esa habrá sido, ojalá, la verdadera aportación realizada.

José María Sorando

Dpto. de Matemáticas
IES Elaios, Zaragoza

jmsorando@ono.com
http://catedu.es/matematicas_mundo