

RAMANUJAN: UN MATEMÁTICO EJEMPLAR PARA TODOS

“La breve vida y la muerte de Ramanujan son simbólicas de las condiciones de la India.”

Jawaharlal Nehru

POR MANUEL LÓPEZ PELLICER

$$B_k = - \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} \frac{B_i}{k+1-i}$$



Srinivasa Aiyangar Ramanujan.

www.ehindi.fbese.tifr.res.in

Ramanujan: un matemático ejemplar para todos

CONDICIONES FAMILIARES

Srinivasa Aiyangar Ramanujan nació en Erode, cerca de Madrás, el 22 de diciembre de 1887. Vivió en la época en que la India luchaba por su independencia. Las revueltas contra los ingleses comenzaron en 1857. Mohandas Karamchand Gandhi, héroe pacifista de la independencia india, conocido como Mahatma Gandhi, vivió entre 1869 y 1948. La independencia de la India se produjo el 15 de agosto de 1947.

La familia de Ramanujan era muy pobre, aunque pertenecía a la casta Brahmin que era una casta alta. Su padre trabajaba como contable

en un comercio de telas de Kumbakonam. Su madre, que se caracterizó por su gran sentido común, era hija de un modesto oficial del juzgado de Erode. Su abuelo sufrió la lepra.

PRIMEROS ESTUDIOS Y EL LIBRO DE CARR

A los cinco años entró en una modesta escuela para miembros de su casta. Antes de los diez años ya recitaba a sus compañeros de clase fórmulas matemáticas y muchas cifras del número π .

A los once años fue el primer alumno del distrito en los exámenes de enseñanza primaria y obtuvo una beca para el instituto local. Según sus biógrafos indios a los doce años dominaba la

trigonometría, a los quince años calculó la longitud de la circunferencia ecuatorial con un error de solo unos pocos metros y obtuvo la fórmula de Euler:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

que el genial matemático suizo obtuvo y popularizó en 1748, si bien parece que Roger Cotes ya había obtenido en 1714 que:

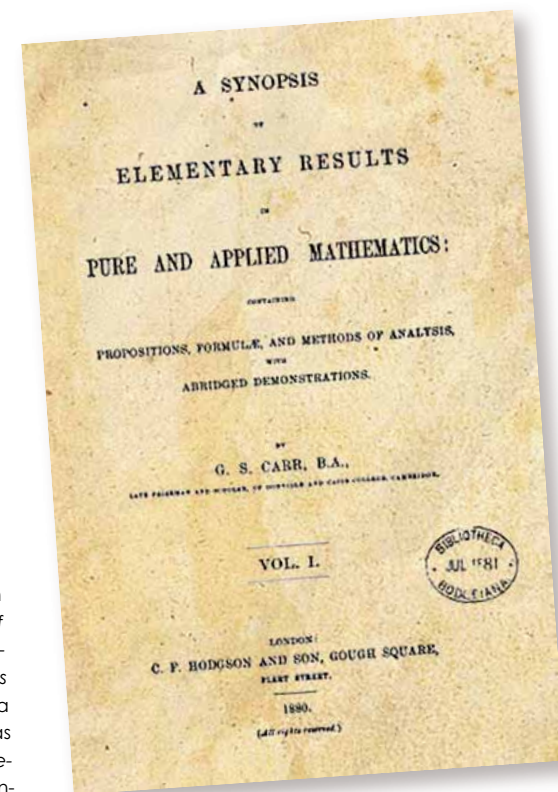
$$\ln(\cos x + i \sin x) = ix$$

sin explicitar que el logaritmo natural o neperiano tiene infinitos resultados. Las pruebas de Cotes y de Euler utilizaban desarrollos en serie.

A los 16 años, un amigo le consiguió, en la biblioteca local, el libro "A Synopsis of Elementary Results in Pure Mathematics: Propositions, Formulae and Methods of Analysis with abridged demonstrations", que consta de 6165 teoremas ordenados, sin apenas pruebas, pues fiel al subtítulo "abridged demonstrations" solo ofrece algunas referencias cruzadas.

Este libro lo escribió, en 1880, George Shoobridge Carr, que era un preparador privado para unos exámenes difíciles de Matemáticas en Cambridge conocidos como los "Mathematical Tripos", por el taburete de tres patas donde se sentaban los estudiantes. Desde su comienzo en 1730 consistían en la resolución de laboriosos problemas de Matemáticas durante cuatro días completos, una semana de descanso y, a continuación, comenzaba otra serie de cuatro días de problemas. El prestigio de los *Mathematical Tripos* clasificaba a los participantes determinando, en buena medida, su futuro profesional. La mejor puntuación obtenida fue de 16.368 puntos de un total de 33.541; se valoraba la rapidez y el número de respuestas correctas.

Bertrand Russell cuenta que, tras pasar los Tripos, vendió todos los libros de Matemáticas de la preparación. Godfrey H. Hardy sintió que se le entrenaba como a un caballo de carreras durante la preparación de los Tripos.



Portada de una de las ediciones del libro original de George S. Carr.

www.openlibrary.org

“Antes de los diez años ya recitaba a sus compañeros de clase fórmulas matemáticas.”



Casa natal de Ramanujan en la época actual.

palaeblog.blogspot.com.es

Ramanujan: un matemático ejemplar para todos

El estilo conciso del libro de Carr influyó mucho en Ramanujan quien, según Hardy, hizo famoso al libro que abrió un nuevo mundo a Ramanujan, quien se dedicó a intuir todos los resultados y las fórmulas del libro. Esa fue su formación matemática básica.

SU INGRESO EN LA UNIVERSIDAD

Ramanujan superó los exámenes de ingreso en la Universidad de Madrás, a los diecisiete años, obteniendo una beca por su destreza en matemáticas.

Absorbido por las Matemáticas, se dedicó a la resolución de problemas matemáticos y, olvidando todo lo que le rodeaba, desatendió las

otras asignaturas, no superó los exámenes y perdió la beca, lo que le provocó una depresión y se aisló unos meses en las montañas cercanas.

A la vuelta, no se le permitió continuar en la Universidad y se dedicó en exclusiva, durante algo más de dos años, a las Matemáticas, apuntando sus resultados en unos grandes cuadernos, conocidos como los cuadernos de Ramanujan.

LA BODA DE RAMANUJAN Y RAMACHANDRA RAO

A los veintidós años, su madre le organizó su boda con una niña de nueve años, que era pariente suya. Ello le obligó a buscar trabajo, fracasando en su intención de conseguir un trabajo que fuese compatible con su dedicación matemática.

En 1910, visitó a V. Ramaswamy Aiyer, cofundador de la Sociedad Matemática India, de la que fue su Presidente durante 1926-30 (fundada en 1906, antes que la Real Sociedad Matemática Española, que lo fue en 1911), a quien impresionó al mostrarle sus cuadernos.

Bajo la recomendación de Ramaswamy Aiyer, visitó a Ramachandra Rao, hombre culto, inteligente, rico, muy influyente, pues era recauda-

dor de Nelore, a 80 millas al norte de Madrás, y también cofundador de la Sociedad Matemática India. Ramachandra Rao cuenta así su primera entrevista con Ramanujan:

"Una pequeña figura rústica, vigorosa, sin afeitar, desaliñada, con un rasgo llamativo, ojos brillantes, entró con un gastado libro de notas bajo el brazo. Era extremadamente pobre. Había huido de Kumbakonam a Madrás a fin de proseguir sus estudios, pero necesitaba que le suministrara el mínimo vital sin esfuerzo de su parte para poder continuar sus investigaciones.

Abrió el libro y comenzó a explicar algunos de sus descubrimientos. Al punto noté claramente que era algo fuera de lo corriente, pero mis conocimientos no me permitieron juzgar si hablaba con sentido o sin él. Suspendido todo juicio le pedí que viniera de nuevo y así lo hizo. Apreció debidamente mi ignorancia y me demostró algunos de sus hallazgos más simples. Estos iban más allá de los libros existentes y ya no tuve duda de que era un hombre notable. Después, paso a paso, me inició en las integrales elípticas y en las series hipergeométricas y, finalmente, en su teoría de las series divergentes, no divulgada todavía; me convirtió. Le pregunté qué era lo que deseaba. Dijo que quería una pequeña pensión para vivir y así proseguir sus investigaciones."

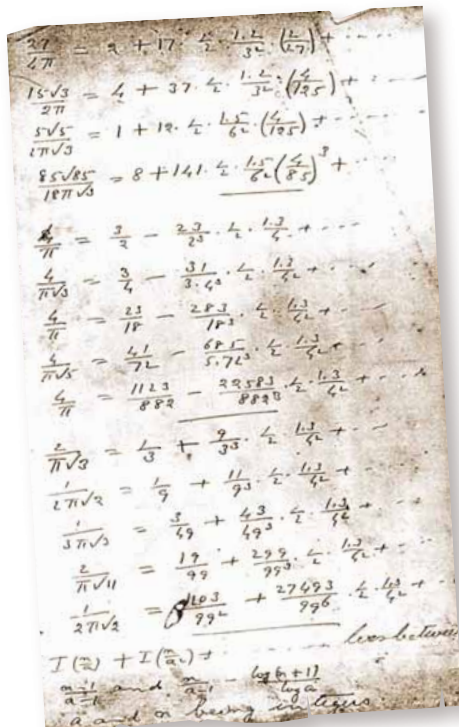
Ramachandra Rao mantuvo a Ramanujan durante un año. Así pudo seguir investigando y en 1911 publicó su primer artículo sobre los números de Bernoulli en el tercer volumen del *Journal of the Indian Mathematical Society*. Le siguieron otros dos artículos publicados en 1912 en esta misma revista, con lo que consiguió ser conocido en la Universidad de Madrás, pero no pudo conseguir ninguna beca.

SU TRABAJO EN EL PUERTO DE MADRÁS

Ramanujan no quería ser mantenido mucho tiempo por otra persona y, gracias a la influencia de Ramachandra Rao, consiguió un humilde empleo en el puerto de Madrás con un salario mínimo que le permitió seguir con su dedicación absoluta a las Matemáticas. Empezó a trabajar el 1 de marzo de 1912. El manager del Madras Port Trust era S. Narayana Iyer, que tenía formación matemática y se interesó tanto por el trabajo de Ramanujan que en 1913 publicó un trabajo sobre los números primos basado en la obra de Ramanujan.

Ramachandra Rao (arriba) y Ramaswamy Aiyer (abajo).

www.imsc.res.in



"Una pequeña figura rústica, vigorosa, sin afeitar, desaliñada, con un rasgo llamativo, ojos brillantes."

Ramachandra Rao

Cuadernos de Ramanujan.

www.rafaazaragoza.com

Ramanujan: un matemático ejemplar para todos

Algo parecido sucedió con C L T Griffith, profesor de Ingeniería Civil en la Escuela de Ingeniería de Madrás, que se había formado en el University College de Londres. Al apreciar el valor de la obra de Ramanujan escribió, el 12 de noviembre de 1912, a M.J.M. Hill, profesor de Matemáticas del University College de Londres, enviándole parte del trabajo de Ramanujan y una copia del artículo de Ramanujan de 1911 de los números de Bernoulli.

Hill contestó con entusiasmo, reconociendo que no terminaba de entender algunos resultados de Ramanujan de series divergentes y recomendando a Ramanujan el estudio del libro de Bromwich titulado *Theory of infinite series*, consejo no seguido por Ramanujan, pues era un genio matemático sin interés en la formación y desconocía lo que significaba.

Gracias al puerto de Madrás, Ramanujan había conseguido el apoyo de cierta élite intelectual india pues, al conocer su genio, comenzaron a admirarle altos cargos del puerto, tanto indios como ingleses, a quienes los años de estudio habían dejado gran aprecio por las matemáticas.

Así es como el Director General del Observatorio Meteorológico del Imperio Británico, antiguo alumno y profesor de Matemáticas en Cambridge, conoció la historia de Ramanujan cuando visitó Madrás. Bajo su intercesión, la Universidad de Madrás concedió a Ramanujan una beca por dos años, que triplicaba su salario

“La Universidad de Madrás concedió a Ramanujan una beca por dos años, que triplicaba su salario en el puerto. Desde este momento Ramanujan dejó su trabajo y comenzó su dedicación total a las matemáticas.”

en el puerto. Desde este momento, Ramanujan dejó su trabajo y comenzó su dedicación total a las Matemáticas.

LA FAMOSA CARTA DE RAMANUJAN

Animado por sus amigos y protectores, Ramanujan comunicó en 1913 sus resultados a tres profesores de Cambridge, E. W. Hobson, H. F. Baker y Godfrey Harold Hardy. Solo respondió Hardy, quien también tuvo la tentación de tirar la carta de Ramanujan, pero el mismo día que la recibió comenzó a leerla por la noche con su amigo y colaborador John Edensor Littlewood, tratando de descifrar la lista de 120 fórmulas y teoremas de Ramanujan. Horas más tarde creían estar ante la obra de un genio. Creemos de interés reproducir algunos fragmentos de la carta de Ramanujan, fechada el 16 de enero de 1913:

“Apreciado señor:

Me permito presentarme a usted como un oficinista del departamento de cuentas del Port Trust Office de Madrás con un salario de 20 libras anuales solamente. Tengo cerca de 23 años de edad. No he recibido educación universitaria, pero he seguido los cursos de la escuela ordinaria. Una vez dejada la escuela he empleado el tiempo libre de que disponía para trabajar en Matemáticas. No he pasado por el proceso regular convencional que se sigue en un curso universitario, pero estoy siguiendo una trayectoria propia. He hecho un estudio detallado de las series divergentes en general y los resultados a que he llegado son calificados como “sorprendentes” por los matemáticos locales...

Yo quería pedirle que repasara los trabajos aquí incluidos. Si usted se convence de que hay alguna cosa de valor me gustaría publicar mis teoremas, ya que soy pobre. No he presentado los cálculos reales ni las expresiones que he adoptado, pero

he indicado el proceso que sigo. Debido a mi poca experiencia tendría en gran estima cualquier consejo que usted me hiciera. Pido que me excuse por las molestias que ocasiono.

Quedo, apreciado señor, a su entera disposición.”

LA REACCIÓN DE HARDY ANTE LA CARTA

Hardy en su biografía sobre Ramanujan escribió:

“Yo había probado cosas como (1.7), y (1.8) me resultaba vagamente familiar, de hecho es una fórmula clásica de Laplace, probada por Jacobi; (1.9) aparece en un artículo de Rogers de 1907. Pensé que como experto en integrales definidas probablemente podría probar (1.5) y (1.6), lo hice pero con muchas más dificultades de las que esperaba.

Las fórmulas (1.1) a (1.4) eran mucho más interesantes y pronto resultó obvio que Ramanujan debía tener teoremas mucho más generales que se estaba reservando. La segunda es una fórmula de Bauer conocida en la teoría de series de Legendre. Los teoremas necesarios para probarlas están en un tratado de Bailey sobre funciones hipergeométricas.

Las fórmulas (1.10) a (1.13) son de un nivel muy diferente y obviamente difíciles y profundas. (1.10) a (1.12) me derrotaron completamente. Nunca había visto nada como ellas. Una simple mirada era suficiente para mostrar que solo podían haber sido escritas por un matemático de la categoría más alta. Debían ser ciertas, puesto que, si no lo fueran, nadie tendría la imaginación para inventarlas”

La carta de Ramanujan contenía la afirmación de que disponía de una fórmula que le permitía calcular la cantidad de números primos hasta



Harold Hardy (1877-1947).
palaeblog.blogspot.com.es

100.000.000 “en general sin ningún error y en algunos casos con un error de 1 o de 2”.

Hardy respondió a Ramanujan en términos muy positivos, pidiéndole que enviase las demostraciones y detalles sobre la fórmula de los números primos. Mientras tanto Hardy y Littlewood pasaron muchos ratos intentando descifrar otras partes de la carta. Bertrand Russell escribió a un amigo que “había encontrado a Hardy y a Littlewood en un estado de gran agitación, porque creían haber encontrado a un segundo Newton, un empleado hindú de Madrás con un estipendio de 20 libras al año”.

Al recibir la segunda carta de Ramanujan se dieron cuenta que había concebido otro de los descubrimientos fundamentales de Riemann en el Teorema de los números primos: su primer perfeccionamiento de la función logaritmo integral de Gauss,

$$\int_2^N \frac{dx}{\ln x}$$

para contar los números primos hasta N. La fórmula de Ramanujan no incluía las correcciones que Riemann había elaborado utilizando los ceros de la función zeta de Riemann, pero Ramanujan solo había concebido las aportaciones Euler, Legendre, Chebychev y Gauss en

Ramanujan: un matemático ejemplar para todos



el teorema de los números primos. Entonces fue cuando Littlewood emocionado exclamó que *podía creer que Ramanujan era al menos un Jacobi*.

La respuesta de Hardy a esta segunda carta fue entusiasta y entre otras cosas escribió que *"haber demostrado lo que usted afirma habría sido la empresa matemática más extraordinaria de toda la historia de la Matemática"*. Hardy y Littlewood decidieron hacer todo lo posible para traer a Ramanujan a Cambridge. Encargaron a E.H. Neville, un profesor del Trynith College de visita en la India, que convenciese a Ramanujan de la conveniencia de unirse al grupo de Hardy y Littlewood.

La entusiasta carta de Hardy abrió todos los resortes de la universidad y de la administración a favor de Ramanujan. La Universidad de Madrás le concedió una beca de 250 libras anuales, el billete de barco para viajar a Inglaterra¹ y dinero para instalarse en Cambridge, donde llegó en 1914, recibiendo del Trinity College otra asignación de 60 libras, gracias al esfuerzo de Hardy. Todo ello le permiti-

tió a Ramanujan vivir en Inglaterra y mantener a su familia en la India. Por fin se podía dedicar a la investigación sin ansiedad, comenzando de inmediato su trabajo con Littlewood y Hardy.

COLABORACIÓN CON HARDY Y LITTLEWOOD

Hardy y Ramanujan revisaron los cuadernos de Ramanujan, donde había mucho más de los 120 teoremas que Ramanujan había enviado a Hardy en sus cartas.

Algunos teoremas eran incorrectos y otros ya habían sido descubiertos. Pero el genio de Ramanujan produjo una profunda impresión en Hardy, que veía en Ramanujan un segundo Euler. Hardy tenía una escala subjetiva de valoración del genio matemático. Las calificaciones que atribuía a Ramanujan, David Hilbert, Littlewood y a sí mismo eran, respectivamente, 100, 80, 30 y 25.

Ramanujan pasó casi cinco años en Cambridge colaborando con Hardy y Littlewood. Hardy y Ramanujan tenían personalidades muy diferentes, pues eran diferentes sus culturas y opues-

tos sus estilos de trabajo y creencias. Hardy era ateo y matemático riguroso con pasión por la demostración; Ramanujan era profundamente religioso y con fuerte convicción en el valor de la intuición².

Pronto Hardy se percató de las sorprendentes limitaciones de los conocimientos de Ramanujan debido a su nula formación matemática, pues su formación se había detenido antes de 1880, cuando se publicó el libro de Carr, que entonces ya estaba desfasado. Su desconocimiento de las Matemáticas modernas europeas era casi completo. Hardy intentó enseñarle, pero pronto comprendió que era imposible hacerlo de forma sistemática, pues incluso desconocía lo que significaba una demostración en Matemáticas. Para Hardy, los concisos métodos de Ramanujan eran tan novedosos, faltos de claridad y precisión, que el lector ordinario difícilmente podía seguirle.

Hardy, además de enseñarle lo que pudo, tuvo la sabiduría de no ahogar su portentosa intuición. Según Hardy, los métodos de Ramanujan eran tan concisos y novedosos, y su presentación tan falta de claridad y precisión, que el lector ordinario, no acostumbrado a semejante gimnasia intelectual, difícilmente podía seguirle. Nunca fue un matemático ortodoxo. Inicialmente también Littlewood colaboró en dar formación a Ramanujan. El comienzo de

la Guerra Mundial de 1914 obligó a Littlewood a cumplir sus deberes militares.

Durante tres años Ramanujan, en colaboración con Hardy, tuvo una actividad matemática constante. Se veían a diario, colaborando en numerosos artículos de investigación. Fue un periodo muy fructífero para ambos. Ramanujan publicó muchos trabajos y dejó muchos resultados escritos sin publicar, de los que dos tercios fueron redescubrimientos de teoremas importantes. A título de ejemplo vamos a comentar sus aportaciones en el problema de la partición.

Una partición de un número natural N es una sucesión decreciente de números naturales cuya suma es N . Por ejemplo, para $N=4$ se tiene que $4 = 3+1 = 2+2 = 2+1+1 = 1+1+1+1$, por lo que si el número de particiones distintas de N se denota por $p(N)$, se tiene que $p(4) = 5$. A principios del siglo XX, se obtuvo que $p(200) = 3.972.999.029.388$.

Ramanujan y Hardy en 1917 hallaron una fórmula asintótica que permitía hallar $p(N)$. Además, en la búsqueda de propiedades aritméticas de los números $p(N)$, Ramanujan probó que:

"El genio de Ramanujan produjo una profunda impresión en Hardy, que veía en Ramanujan un segundo Euler."

1. Los cronistas indios cuentan que la madre de Ramanujan se oponía a que su hijo viajase a Cambridge, hasta que tuvo un sueño en el que la diosa Namagiri le ordenaba que no pusiese ningún obstáculo entre su hijo y el desarrollo de su vocación.

Ramanujan se embarcó el 17 de marzo de 1914 en Madrás y llegó a Londres el 14 de abril. Le esperaba H. Neville que le llevó a su casa en Chesterton Road in Cambridge. Seis semanas después dejaba la casa de Neville y se trasladó a Whewell's Court, situada a cinco minutos andando del despacho de Hardy.

2. Dicen sus biógrafos indios que afirmaba recibir visiones matemáticas en sueños de la divinidad Namagiri y de su esposa Narasimba, y que con frecuencia Ramanujan decía que "Una ecuación no tenía sentido a menos que represente un pensamiento de Dios".

Ramanujan: un matemático ejemplar para todos

- si $N = 5k + 4$ entonces $p(N)$ es múltiplo de 5,
- si $N = 7k + 5$ entonces $p(N)$ es múltiplo de 7,
- y si $N = 11k + 6$ entonces $p(N)$ es múltiplo de 11.³

HONORES OTORGADOS A RAMANUJAN

A pesar de su débil salud, Ramanujan trabajó mucho en Cambridge, recibiendo las siguientes distinciones:

- En 1916 Cambridge premió a Ramanujan con el título de Bachelor in Arts por su artículo *Highly composite numbers*, Proc. London Math. Soc. (2) 14 (1915), 347–409. Este título corresponde al de Licenciado. En esa época en Cambridge aún no existía el título de Doctor.
- En 1917 es nombrado miembro de la London Mathematical Society.
- En 1918 se le elige Fellow de la Royal Society. Fue el segundo hindú⁴ que obtuvo esa distinción. Ramanujan ha sido el más joven en obtener la distinción de Fellow.
- En 1918 es nombrado Fellow del Trinity College de Cambridge, con un buen sueldo y sin obligaciones. Fue el primer hindú en recibir esa distinción.
- En 1918 la Universidad de Madrás le da otra beca y crea para él una cátedra en Matemáticas.

LA ENFERMEDAD DE RAMANUJAN Y LA ANÉCDOTA DEL HOSPITAL

Se dice que en 1917 contrajo una tuberculosis incurable unida a una seria deficiencia vitamínica, tal vez consecuencia de su riguroso vegetarianismo unido a los problemas de encontrar ciertas verduras en Inglaterra durante la Primera Guerra Mundial.

Es cierto que estuvo en sanatorios antituberculosos, si bien no es nada claro que la tuberculosis

fuera la causa principal de sus dolencias, pues sufría amebiosis, que es una infección intestinal que probablemente traía de la India, y, además, había sufrido una operación en la India durante su juventud.

Desde entonces salió muy poco de los hospitales, pero continuó su actividad matemática, pues como dijo Littlewood, "cada entero positivo era un amigo personal de Ramanujan". Además, las distinciones recibidas de la London Mathematical Society, la Royal Society y el Trinity College de Cambridge supusieron estímulos a su constante actividad matemática.

Hardy relató que le visitó en un hospital en Putney, cerca de Londres, y le comentó que había viajado en un taxi cuya matrícula era el insípido número 1729, a lo que Ramanujan contestó:

"No diga usted eso pues 1729 es un número muy interesante, pues es el número más pequeño expresable como suma de dos cubos de dos maneras diferentes, ya que $1729 = 10^3 + 9^3$ y también $1729 = 12^3 + 1^3$."

Hardy, asombrado, le preguntó si conocía la respuesta al problema correspondiente para la cuarta potencia y él replicó, después de un momento de reflexión, que "el ejemplo que pedía no era obvio y que el primero de tales números debía ser muy grande".

"En el setenta y cinco aniversario de su nacimiento salió un sello conmemorativo del que se vendieron varios millones de copias el primer día."

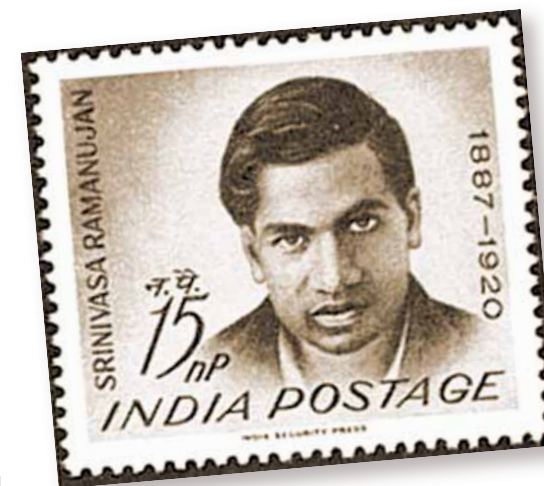
FALLECIMIENTO E IMPACTO DE RAMANUJAN

Como el clima de Inglaterra no le beneficiaba en su tuberculosis, a principios de 1919 regresó a Madrás muy enfermo buscando un clima más seco. El recibimiento en Madrás fue impresionante. Recibió el mejor tratamiento médico posible, con todos los gastos pagados, y una buena casa donde pasar el final de su enfermedad. Falleció en 1920 a los treinta y tres años, con una gran reputación científica, consecuencia de su amor a los números.

El impacto de Ramanujan en las Matemáticas y en la India ha sido grande. Un ejemplo de su influencia en Matemáticas la encontramos en Pierre Deligne que obtuvo la medalla Fields en 1978 por su contribución a demostrar la tercera y última conjetura de Weil, completando el programa iniciado y desarrollado por Alexander Grothendieck. Como corolario de este trabajo demostró la celebre conjetura de Ramanujan de acotación de los coeficientes de Fourier de la función $\tau(n)$ de Ramanujan, así como la conjetura más general de Ramanujan–Petersson en la teoría de formas modulares elípticas.

Por otra parte, el papel de Ramanujan en la conciencia nacional India también ha sido inmenso. En el setenta y cinco aniversario de su nacimiento salió un sello conmemorativo del que se vendieron varios millones de copias el primer día. Del Primer Ministro Nehru, líder de la independencia nacional, son estas palabras sobre Ramanujan:

3. Un artículo dedicado a este tema en el volumen de octubre de 2001 de la revista "Notices of the American Mathematical Society" muestra la actualidad de estos trabajos.
4. El primero fue Ardaseer Cursetjee (1808 – 1877). Era ingeniero y constructor de barcos. Fue nombrado Fellow en 1841.



Sello conmemorativo del 75 aniversario del nacimiento de Ramanujan.

www.rapgenius.com

"La breve vida y la muerte de Ramanujan son simbólicas de las condiciones de la India. De nuestros muchos millones son pocos los que consiguen alguna educación; y son muchos los que viven al filo de la muerte por inanición... Si la vida les abriese sus puertas y les ofreciese comida y condiciones higiénicas de vida y educación y oportunidades de crecimiento, ¿cuántos de estos millones serían científicos eminentes, educadores, técnicos, industriales, escritores y artistas, ayudando a construir una nueva India y un nuevo mundo?"

Manuel López Pellicer

Dpto. de Matemática Aplicada
Universidad Politécnica de Valencia

Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas
y Naturales de Madrid