



Del quinto postulado a la forma del Universo

“La geometría no existe más allá de nuestra imaginación y tratarla como algo físico, propio del mundo que percibimos con nuestros sentidos, carece de sentido”.

Rubén Vígara Benito



Imaginemos un pequeño ser microscópico, para el cual todo el universo conocido cabe en una molécula formada por dos átomos de hidrógeno junto a uno de oxígeno. Imaginemos además que ese ser, pequeño en tamaño, es un gigante científico que tras realizar observaciones, mediciones, experimentos... llega a una fascinante conclusión, que anuncia ante sus colegas con la solemnidad que merece: "Nuestro universo puede ser de dos formas: Hielo o Agua, y será de una u otra forma dependiendo de una constante desconocida, que llamaré Temperatura. Si la temperatura es baja, nuestro mundo será Hielo, rígido y cristalino, y, si la temperatura estuviera por encima de un cierto umbral, el hielo se fundiría convirtiéndose en agua, fluida y adaptable".

Hace alrededor de dos siglos se produjo en nuestro planeta ¡por triplicado! un descubrimiento que tiene cierta analogía con la historia de nuestro pequeño ser. Tres gigantes geómetras de aquella época llegaron de manera independiente en Rusia, Hungría y Alemania a

una conclusión que podríamos resumir evocando a las elucubraciones anteriores: "Nuestro universo puede ser de tres formas: esférica, euclidiana o hiperbólica, y será de una forma u otra dependiendo del valor de una constante desconocida, que llamaremos Curvatura. Si la curvatura es positiva, el universo será esférico y cualquier trayectoria recta en el universo está condenada a volver al punto de partida desde el lado opuesto, como lo hacen los que (creen que) caminan en línea recta sobre la superficie de una esfera, y las rectas, que a simple vista parezcan paralelas, en realidad se irán acercando poco a poco hasta que necesariamente se corten en algún punto. Si la curvatura es negativa, el universo será hiperbólico, su geometría será enormemente rica con una gran diversidad de figuras que somos incapaces de imaginar como pentágonos, hexágonos, heptágonos... con todos sus ángulos rectos, y las rectas que creemos paralelas se alejarán indefinidamente según se vayan desplazando en la misma dirección. Si la curvatura es cero, el universo será euclidiano, en él se cumplirán todos los teoremas de la geometría clásica y las rectas paralelas se mantendrán siempre a la misma distancia, hasta el infinito." Hasta el infinito... ¿no será mucho?

MATEMÁTICAS FRENTE AL MUNDO FÍSICO

Desde nuestra más tierna infancia tenemos una tendencia innata a confiar en la palabra de nuestros maestros. Muchos de los contenidos que aprendemos durante nuestra etapa escolar se quedan grabados a fuego en nuestro cerebro, como verdades absolutas, y solamente cuando alcanzamos un conocimiento más avanzado sobre alguna materia somos capaces de ponerlos en duda. Una de las disciplinas que ofrece menos espacio para esta duda son las Matemáticas. Las Matemáticas se nos presentan en la escuela como una serie de verdades inmutables que además describen con exactitud el mundo real. Es cierto que algunos conceptos matemáticos están directamente extraídos de nuestra observación del mundo, de modo que es difícil ponerlos en duda, aunque hay otros que no resistirían un análisis mínimamente detallado. Un ejemplo del primer tipo es el concepto de perpendicularidad, y uno del segundo tipo sería el concepto de paralelismo. Todos creemos haber visto multitud de rectas perpendiculares y de rectas paralelas. Nos hablaron de la existencia de ambos tipos de rectas prácticamente a la vez y las hemos guardado en el mismo cajón de nuestra memoria. Sin embargo, ambos conceptos son muy diferentes. ¿Cómo se comprueba que dos rectas son perpendiculares? Debemos acercarnos al punto de intersección

“Aunque la geometría se inspire en nuestra percepción del mundo físico, no forma parte de él.”

y comprobar que los ángulos adyacentes que forman son idénticos. ¿Cómo se comprueba que dos rectas son paralelas? Tarea difícil es esta: hay que ir hasta el infinito, comprobar que no se cortan... y luego volver. Aunque comprobar la perpendicularidad tenga su dificultad y cualquier proceso de medida tenga un error inherente, al menos es algo que ocurre delante nuestro.

En realidad, la geometría no existe más allá de nuestra imaginación (mundo lógico), y tratarla como algo físico, propio del mundo que percibimos con nuestros sentidos (mundo ontológico) carece de sentido. Aunque la geometría se inspire en nuestra percepción del mundo físico, e incluso sea capaz de producir múltiples aplicaciones prácticas en dicho mundo, no forma parte de él.

LOS ELEMENTOS DE EUCLIDES

Al contrario que otras teorías científicas, que suelen aparecer con un apellido que recuerde a su descubridor (la mecánica de Newton, la teoría de la relatividad

de Einstein, el modelo atómico de Bohr, la teoría de la evolución de Darwin...), la geometría se enseña en la escuela sin apellido, aunque si hubiera de llevar uno ese sería el de Euclides de Alejandría. Aunque se expliquen los Teoremas de Pitágoras, y de Tales, fundamentalmente la geometría que se enseña a lo largo de casi toda la etapa escolar (hasta que bien entrada la educación secundaria se introduce la *geometría analítica*, debida a Descartes, usando ejes coordenados), está basada en Los Elementos de Euclides. Nunca está de más recordar que Los Elementos es una de las obras más importantes de todos los tiempos, el segundo libro con más ediciones de la historia (solo superado por La Biblia), y ha sido el libro con el que han aprendido matemáticas los eruditos de distintas épocas y culturas durante más de 2000 años.

Aunque muchos de los resultados que aparecen en Los Elementos ya eran conocidos por egipcios y babilonios más de mil años antes de Euclides, lo que diferencia

“La geometría se enseña en la escuela sin apellido, aunque si hubiera de llevar uno ese sería el de Euclides de Alejandría.”



Wikimedia Commons

De izquierda a derecha, Gauss, Lobachevski y Bolyai



Euclides de Alejandría, retrato de Justus van Gent fechado en 1474 (izquierda) y papiro datado a finales del siglo I d.C. con parte de los Elementos de Euclides (derecha).



Wikimedia Commons

a Los Elementos y a la Matemática griega en general, de la matemática anterior es la introducción del método axiomático deductivo. A partir de unas definiciones y unos pocos principios, que por ser tan evidentes se enuncian sin demostración (axiomas o postulados), se van deduciendo de forma lógica diferentes resultados cada vez más complejos (proposiciones o teoremas), al igual que las fichas de dominó puestas de pie en fila van cayendo de una en una tras caer la primera de ellas.

En Los Elementos, tras introducir 23 definiciones sobre distintos objetos geométricos (punto, línea, ángulo...), Euclides enuncia los cinco postulados en los que basa la geometría plana:

- P1. Se puede trazar una línea recta desde un punto a cualquier otro.
- P2. La línea recta puede prolongarse cuanto se desee.
- P3. Puede describirse un círculo de radio arbitrario y centrado en un punto arbitrario.

- P4. Dos ángulos rectos cualesquiera son iguales.
- P5. Si una línea recta, cayendo sobre otras dos, forma, al mismo lado, ángulos internos cuya suma es menor que dos rectos, aquellas dos, prolongadas hacia ese lado, se cortan.

Los postulados P1, P2 y P3 afirman, esencialmente, que tenemos una regla y un compás con los que podemos trazar rectas y circunferencias a nuestro gusto. La idea de perpendicularidad, que hemos mencionado antes, aparece explícitamente en P4, mientras que el concepto de paralelismo aparece escondido debajo del postulado P5. Habitualmente se suele sustituir el postulado P5 por el postulado equivalente:

- P5'. Por un punto exterior a una recta pasa una única recta paralela.

El postulado P5' es conocido como Axioma de Playfair¹, aunque ya aparece en los comentarios a los Elementos

de Proclo. Un hecho muy remarcable es que Euclides ya proporciona al paralelismo un trato especial, sutilmente diferente al resto de propiedades geométricas. Las rectas perpendiculares se definen en la Definición 10 de las 23 definiciones iniciales, mientras que las paralelas aparecen en la Definición 23 (¡la última!) y, mientras que los postulados P1 a P4 son utilizados desde el principio de la obra, P5 no es utilizado hasta la Proposición 29.

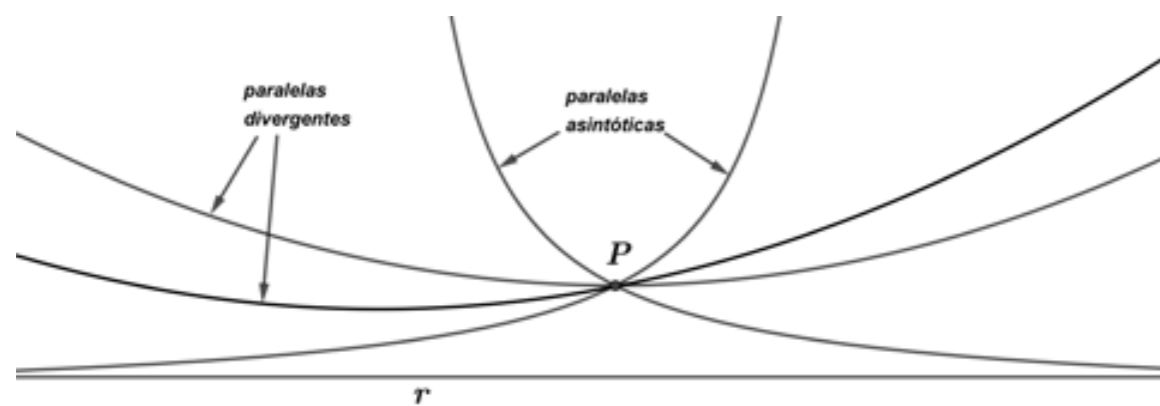
Quizá debido a su enrevesado enunciado, muchos matemáticos posteriores a Euclides como Tolomeo o Proclo comenzaron a dudar de que P5 fuese un postulado. Pensaban que en realidad P5 era un teorema que se podía deducir de P1-P4. Surge así el Problema de las paralelas.

Problema de las paralelas: ¿Es P5 una consecuencia de P1-P4, o es independiente de ellos?

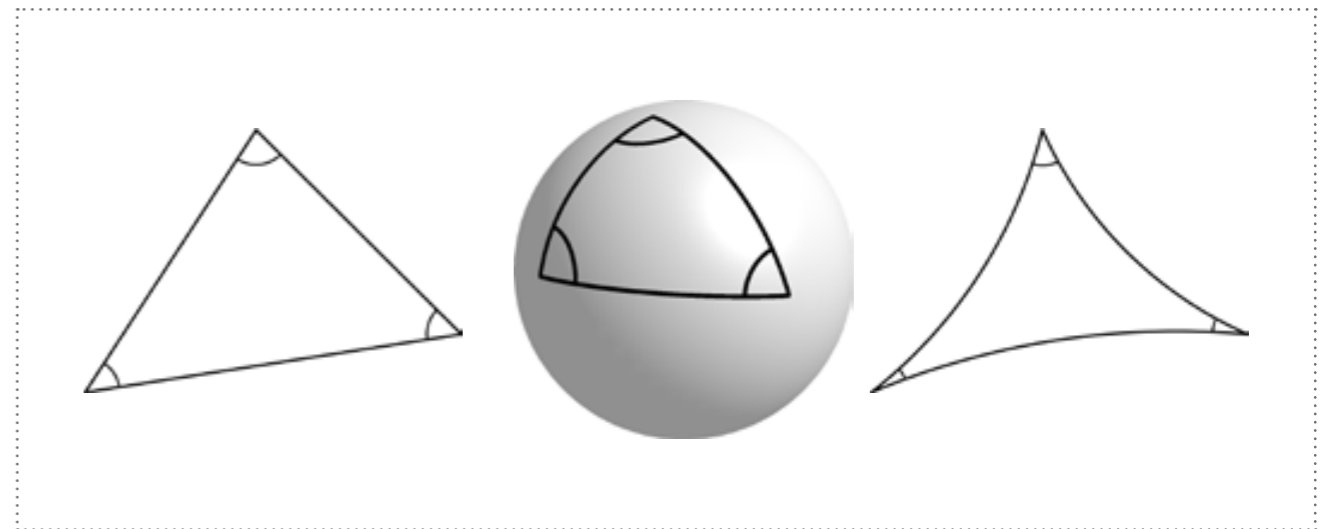
Cabe pensar que, dentro de una concepción platónica del saber matemático, Euclides y sus contemporáneos supieran discernir perfectamente la separación entre las matemáticas, como saber perteneciente al mundo de las ideas, y el mundo físico en el que se basan. Euclides se podía permitir dudar sobre la introducción o no del quinto postulado porque era consciente de que era decisión suya, podía hacerlo o no hacerlo, y lo introdujo probablemente porque lo necesitaba para demostrar algunas propiedades que se daban por bien

conocidas, como el Teorema de Pitágoras, o el teorema que afirma que la suma de los ángulos de un triángulo es igual a dos rectos (180°). Sin embargo, esta separación entre la matemática y el mundo real se fue diluyendo con el tiempo. Llegada ya la Edad Media la geometría euclidiana era considerada como la geometría *necesariamente verdadera*, la única geometría posible, exactamente igual que nos ocurre a nosotros tras nuestro paso por la escuela. Los intentos por demostrar el quinto postulado a partir de los otros cuatro prosiguieron durante varios siglos, sin éxito.

En geometría hiperbólica por un punto P exterior a una recta r pasan infinitas rectas paralelas. Dos de ellas se acercan a r asintóticamente por cada uno de los lados (paralelas asintóticas), mientras que el resto son divergentes, se alejan indefinidamente de r por ambos lados.



Imágenes cedidas por el autor.



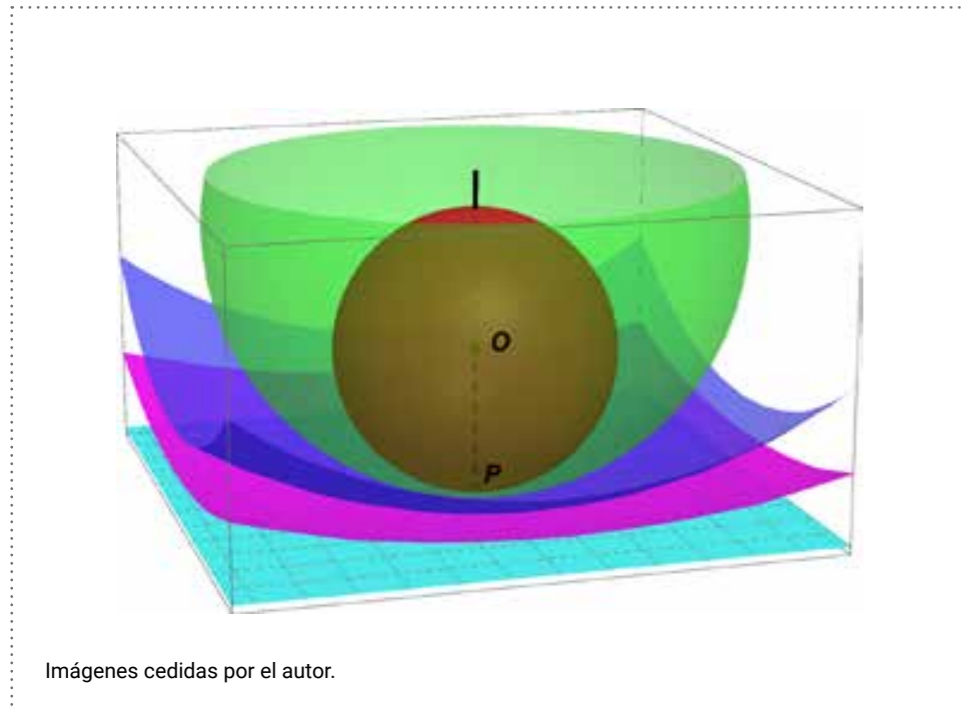
La suma de los ángulos interiores de un triángulo euclidiano (a) es igual a 180° , mientras que en un triángulo esférico (b) es mayor que 180° y en un triángulo hiperbólico (c) es menor que 180° .

EL DESCUBRIMIENTO DE LAS GEOMETRÍAS NO EUCLIDIANAS: GAUSS, LOBACHEVSKI Y BOLYAI

El problema de las paralelas ocupó la mente de numerosos matemáticos hasta que a principios del siglo XIX fue resuelto de manera independiente por tres matemáticos diferentes²: Gauss en Alemania, Bolyai en Hungría y Lobachevski en Rusia. Bolyai y Lobachevski publicaron casi simultáneamente sendos trabajos^{3,4} en los que, a la manera de Euclides, desarrollaron una geometría en la que los postulados P1-P4 se cumplen, pero el postulado P5 no. Esa geometría *no euclidiana* es conocida ahora como geometría hiperbólica, nombre que fue introducido posteriormente por Klein. Gauss, el más grande matemático de aquella época, y quizá de todas, trabajó en el problema durante muchos años, pero no publicó ninguna de sus elucubraciones sobre el mismo, aunque dejó constancia de ellas y fue probablemente la única persona que apreció en su día los trabajos de Bolyai y Lobachevski.

Muchas de las fórmulas de la geometría hiperbólica dependían de una constante desconocida que ahora interpretamos como la curvatura gaussiana, que es negativa cuando la geometría es hiperbólica. Si la curvatura se considera positiva, las fórmulas trigonométricas hiperbólicas se convierten como por arte de magia en fórmulas trigonométricas de geometría esférica, que ya eran conocidas desde mucho tiempo atrás. En el caso intermedio, cuando la curvatura es nula, aparecen las fórmulas propias de la geometría euclidiana.

“El problema de las paralelas ocupó la mente de numerosos matemáticos hasta principios del siglo XIX.”



Imágenes cedidas por el autor.

◀ **En geometría euclidiana una sucesión de esferas cuyo radio tiende a infinito se aproxima a un plano. En geometría hiperbólica esta superficie límite no es un plano sino otra superficie que recibe el nombre de horosfera. La geometría de una horosfera es equivalente a la de un plano euclidiano.**



▲ **La 3-esfera. Si imaginamos que cuando el pez choca con la pared de la pecera azul en lugar de estrellarse aparece automáticamente en el punto equivalente de la pecera verde, y viceversa, como si hubiera atravesado un "portal mágico", ambas peceras formarán un universo del cual el pez no puede escapar.**

Esas tres geometrías (euclidiana, esférica e hiperbólica) también están relacionadas por medio de otras magnitudes geométricas, como la suma de los ángulos de un triángulo. Mientras que en geometría euclidiana la suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a dos rectos, sobre la superficie de una esfera esta suma es mayor que dos rectos (imagine el lector en el globo terráqueo un triángulo con un vértice en el Polo Norte y los otros dos sobre la línea ecuatorial). La geometría hiperbólica rellena el hueco que falta pues en ella la suma de los ángulos interiores de un triángulo es menor que dos rectos.

Ninguno de los tres, ni Gauss, ni Lobachevski ni Bolyai llegó a resolver el problema de la consistencia de la nueva geometría. La teoría sería inconsistente si llevaba a demostrar resultados que fuesen contradictorios. Era un problema que a Gauss preocupaba enormemente, y quizá la causa de que no publicara nada al respecto: no quería arriesgarse a meter la pata. Al fin y al cabo, era considerado el mayor geómetra de su tiempo y tenía un prestigio que mantener. No obstante, las mismas dudas sobre la consistencia se podían albergar sobre la geometría euclidiana, y esto a nadie le preocupaba. Lobachevski y Bolyai tampoco llegaron a demostrar dicha consistencia, pero estaban íntimamente

convencidos de ella por varios motivos. El principal es que, en cierto modo, la geometría hiperbólica contiene a la euclidiana. Imaginemos una esfera S con centro en un punto O del espacio y que pasa por otro punto, P . Imaginemos un rayo r que sale de P atravesando O , e imaginemos que O comienza a alejarse de P a lo largo de dicho rayo, mientras que P queda fijo. La esfera S seguirá pasando por P , pero su radio será cada vez más grande, de manera que en las cercanías de P cada vez parecerá más "aplanada". En el espacio euclidiano, según O se va alejando de P , la esfera S va a ir acercando más y más al plano perpendicular a r que pasa por P . Sin embargo, en el espacio hiperbólico la esfera S no se aproximaría a un plano del espacio hiperbólico sino a una superficie especial que recibe el nombre de horosfera y que, casualmente, tiene geometría euclidiana! Lobachevski y Bolyai utilizaron la geometría euclidiana de las horosferas para deducir numerosos resultados, como la trigonometría hiperbólica. Si la geometría del espacio hiperbólico llevara a contradicción, Lobachevski y Bolyai pensaban que la geometría euclidiana en él contenida también llevaría a una contradicción. La demostración de que la geometría hiperbólica es tan consistente como la euclidiana (*consistencia relativa*) se debe a Beltrami⁵. Poco después de los trabajos de Beltrami, Klein y Poincaré^{6, 7} introdujeron los modelos

que llevan sus nombres (y que en realidad habían sido ya descubiertos antes por Beltrami) y terminaron de popularizar a la geometría hiperbólica, que pasó así a formar parte del corpus de la matemática de la época.

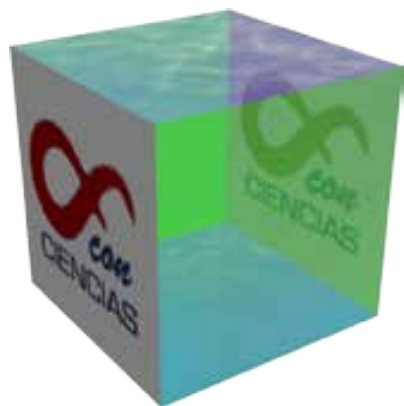
Lobachevski y Bolyai no sólo resolvieron un problema que muchos otros no habían logrado resolver, las consecuencias de sus trabajos son mucho más profundas de lo que somos capaces de imaginar. Gran parte de la ciencia que conocemos actualmente hunde sus raíces en ellos. Por línea directa, en el campo de la geometría, tras ellos llegaron los trabajos de Riemann y otros, sin los cuales serían inconcebibles las teorías de Einstein, por ejemplo. Pero yendo más allá, Lobachevski y Bolyai devolvieron a la matemática su verdadera naturaleza, perdida tras la Grecia clásica, como ciencia especulativa, liberada de la realidad que nos rodea, y con ello los matemáticos recobraron la capacidad de dudar de todo y la libertad de desarrollar teorías de todo tipo. Ellos encendieron la mecha de un incendio que acabó por estallar a finales del siglo XIX con la gran crisis de los fundamentos de la matemática. Gran parte de la matemática posterior, trabajos como los de Cantor, Gödel, Turing y muchos otros probablemente tampoco habrían sido posibles sin los padres de la geometría no euclidiana.

LA CONJETURA DE POINCARÉ, THURSTON Y DE NUEVO LA GEOMETRÍA HIPERBÓLICA

Poincaré también es conocido como el fundador de la topología. En su artículo⁸ y en sus sucesivos complementos sentó las bases de esta rama de la matemática y definió alguno de sus conceptos fundamentales. Uno de ellos es el concepto de variedad compacta: espacio abstracto tal que las cercanías de cada uno de sus puntos son idénticas a un espacio euclidiano, pero que en cierto modo es finito porque cualquier recorrido en ellos acaba pasando arbitrariamente cerca de algún punto por el que ya se ha pasado antes. Al contrario que con las variedades de dimensiones 1 y 2, cuya clasificación es sencilla, el estudio de las 3-variedades (variedades de 3 dimensiones) encierra grandes dificultades. Para que nos hagamos una idea, uno de los primeros problemas sobre 3-variedades propuesto por Poincaré tardó más de 100 años en resolverse, convirtiéndose en uno de los problemas más importantes de la matemática del siglo XX: la Conjetura de Poincaré^{9,10}.

Todos hemos visto películas o series de fantasía en los que aparecían "portales mágicos", puertas que al atravesarlas trasladaban a los protagonistas a otro lugar,

A.



B.



C.



Imagen cedida por el autor.

otro tiempo, otra dimensión... Esa idea nos puede servir para ilustrar cómo se pueden construir 3-variedades, imaginándolas como universos alternativos en los que podríamos estar viviendo. Imaginemos un par de peceras como las de la figura de la página anterior. Imaginemos, además, que ninguna de ellas tiene en realidad un borde de cristal ni de ningún otro material, sino que el borde de ambas peceras, tal como lo vemos, es en su totalidad un portal mágico que comunica una pecera con la otra. De este modo, un pez que viva en ellas cuando aparentemente, desde nuestro punto de vista de observadores exteriores, choque con el borde de una pecera en realidad lo que hará será atravesar ese borde para aparecer en la otra pecera por el punto de la otra pecera que es idéntico al punto de salida de la pecera original. Como los bordes de ambas peceras no tienen ningún elemento que los distinga, el pez nadará y nadará moviéndose de una a otra pecera sin darse cuenta de que está realizando estos cambios, ni de que lo estamos observando. El conjunto formado por ambas peceras es todo su universo, y le es totalmente imposible salir de él. Este universo es la 3-variedad compacta más sencilla y recibe el nombre 3-esfera o esfera de dimensión 3. Del mismo modo en que los hemisferios norte y sur de nuestro planeta se pegan a lo largo del círculo ecuatorial para formar la superficie esférica de nuestro planeta, nuestras dos peceras serían como dos hemisferios tridimensionales que están pegados a lo largo de una superficie esférica *ecuatorial* para producir la 3-esfera.

Otra forma de construir 3-variedades es a partir de una única pecera con forma de poliedro en la que también existen puertas mágicas que conectan parejas de caras

del poliedro. Imaginemos que en el cubo de la figura de la página anterior (a) ponemos una puerta mágica en una cara ocupando toda la cara y conectándola con su opuesta. Cada punto de una cara se corresponde con un punto de la cara opuesta, pero esta correspondencia se puede hacer de varias maneras diferentes. Para saber cual estamos utilizando, imaginemos que hemos colocado una cortina en una de las puertas mágicas con el logo de esta revista, y que dicha cortina se ve desde los dos lados como en la figura (a). Repitiendo el mismo proceso exactamente igual en todas las caras, obtenemos un nuevo universo del que es imposible escapar, una nueva 3-variedad que se llama 3-toro o toro tridimensional. Del mismo modo, si en un dodecaedro conectamos cada cara pentagonal con su opuesta del modo indicado en la figura (b), obtenemos la *esfera homológica de Poincaré* (también conocida como *espacio dodecaédrico de Poincaré*, aparecido por primera vez en⁹), y si lo hacemos del modo indicado en la figura (c) construimos la *3-variedad de Seifert-Weber*¹¹.

Imaginemos ahora que nuestro planeta se ubica en el centro de una de las peceras, y que desde el mismo parte una misión espacial. Una nave con varios astronautas y provisiones para un largo viaje parte del planeta con la intención de recorrer el universo, pero, para evitar perderse y poder regresar siempre a casa utilizan un medio rudimentario: portan un cable con un extremo en la Tierra que irán desplegando a lo largo de todo su viaje. Imaginemos que tras un largo viaje vagando por el universo los astronautas que creían estar alejándose más y más se tropiezan con... ¡la Tierra! ¿Por qué no? Tras su regreso habrían dejado un rastro de cable por el universo con origen y fi-

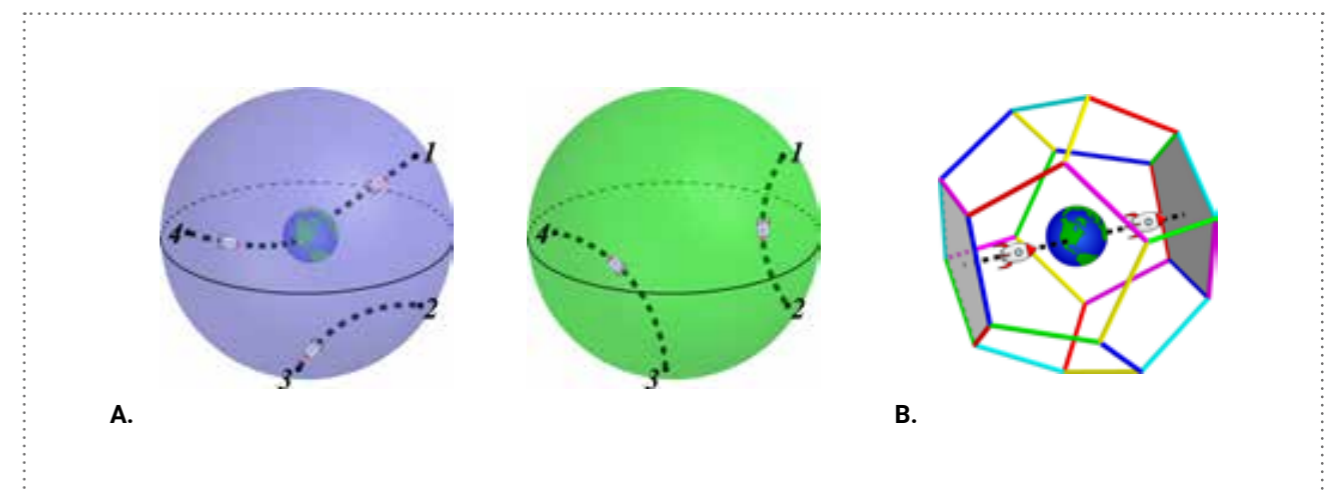
nal en la Tierra. Si la única masa de este universo fuese la de la Tierra, y el universo fuese la 3-esfera, es fácil imaginar que este cable necesariamente se acabaría precipitando sobre el planeta por efecto de la gravedad. En los otros tres ejemplos esto no se cumple: si la nave parte desde el centro del poliedro en línea recta hasta atravesar el centro de una cara y prosigue el camino en línea recta desde el centro de la cara opuesta de nuevo hasta el planeta Tierra como en la figura anexa (b), el cable no podrá contraerse para traerlo de nuevo a la Tierra a menos que lo soltemos de un extremo y estiremos del otro.

Cualquier lazo en la 3-esfera que empieza y termina en el mismo lugar siempre puede ir haciéndose poco a poco más y más pequeño sin necesidad de romperlo hasta recogerse en un único punto. Las 3-variedades que cumplen esta misma propiedad decimos que son *simplemente conexas*. La 3-esfera es simplemente conexa, mientras que ni el 3-toro ni la esfera homológica de Poincaré ni la 3-variedad de Seifert-Weber lo son.

Viaje espacial:
(a) por la 3-esfera y (b) por la variedad de Seifert-Weber. Cuando la nave sale de una figura aparece en la otra pecera, en el caso (a), o en la cara opuesta, en el caso (b).

(a) 3-toro; (b) esfera homológica de Poincaré; (c) espacio de Seifert-Weber. Cada caso es un "universo" tridimensional formado por los puntos de dentro del poliedro. En cada cara hay un "portal mágico" de manera que un habitante que intente

abandonar el poliedro por una cara aparecerá automáticamente por la cara opuesta. Una cortina colocada justo en una de las caras se vería también en la cara opuesta del modo indicado en las figuras (obsérvese la sutil diferencia entre los casos (b) y (c)).



¿Es la 3-esfera la única 3-variedad compacta simplemente conexa?

Esta pregunta la formuló por primera vez H. Poincaré⁹, y a lo largo de los años se ha venido llamando “Conjetura de Poincaré” a la suposición de que la respuesta a esta pregunta era afirmativa.

La Conjetura de Poincaré resultó una cima harto complicada. Los topólogos exploraron múltiples caminos y desarrollaron multitud de técnicas para atacarla sin éxito. El problema recibió un fuerte impulso durante los años 70 del pasado siglo gracias a los trabajos de W. Thurston^{12, 13} que, además, pusieron de moda de nuevo la geometría hiperbólica. Thurston incluyó la Conjetura de Poincaré como parte de un programa aún más ambicioso que pretendía clasificar de cierta manera todas las 3-variedades compactas, un programa en el que la geometría, y en especial la geometría hiperbólica, era clave. Esencialmente, se trataba de estudiar las 3-variedades a partir de las estructuras geométricas que podían soportar, donde “estructura geométrica” viene a ser la forma en que los habitantes de la 3-variedad podrían tomar medidas de distancias, ángulos, etc. dentro de su universo. Existen 3-variedades euclidianas, hiperbólicas o esféricas, por ejemplo, en las cuales un habitante que comenzara a hacer construcciones geométricas con regla y compás construiría figuras exactamente iguales a las que aparecen al desarrollar la geometría euclidiana, hiperbólica o esférica tridimensionales, respectivamente. El 3-toro que hemos construido anteriormente es un ejemplo de 3-variedad euclidiana, mientras que la 3-esfera y la esfera homológica de Poincaré admiten geometría esférica, y la 3-variedad de Seifert-Weber es uno de los ejemplos más sencillos de 3-variedad hiperbólica. Haciendo una simplificación muy tosca, la Conjetura de Geometrización de Thurston dice que todas las 3-variedades se pueden construir pegando “peceras geométricas”, piezas fundamentales que admiten geometría euclidiana, esférica, hiperbólica, o de otros 5 modelos geométricos propuestos por el propio Thurston.

De las ocho geometrías de Thurston, la hiperbólica ha resultado ser la más interesante, y desde el último cuarto del siglo XX se ha llevado a cabo una intensa investigación en 3-variedades geométricas en general, e hiperbólicas en particular, por medio de numerosos especialistas de todo el mundo. Estas investigaciones alcanzaron su momento álgido en 2003, cuando el matemático ruso G. Perelman demostró la Conjetura de Geometrización y, con ella, la Conjetura de Poincaré, en

varios trabajos que puso a disposición de la comunidad científica en internet¹⁴⁻¹⁶. Naturalmente, Perelman adquirió gran relevancia entre los matemáticos tras estos trabajos, pero adquirió mucha más si cabe para el público en general cuando rechazó tanto la medalla Fields que le concedió la Unión Matemática Internacional en su congreso de Madrid en 2006, como el millón de dólares que le ofrecía el Clay Mathematics Institute por haber resuelto uno de los Problemas del Milenio.

“Los propios fundadores de las geometrías no euclidianas ya buscaron evidencias sobre cuál de las geometrías era *más real*.”

CURVATURA DEL UNIVERSO

Los viajes espaciales de la figura 8 son meros juegos conceptuales que pretendían ilustrar el concepto de 3-variedad, pero ¿y si no lo fueran? ¿Y si la realidad se pareciera un poco a alguno de estos mundos imaginarios? Si todo el universo conocido está contenido en una pequeña región de la 3-esfera, o del 3-toro, o de la variedad de Seifert-Weber... ¿cómo podríamos saberlo? Siempre hemos pensado que el universo es infinito, pero ¿qué evidencia real tenemos de ello?

Naturalmente, las preguntas anteriores no son nuevas. Los propios fundadores de las geometrías no euclidianas ya buscaron evidencias sobre cuál de las geometrías era “más real” tomando medidas en el mundo real de figuras lo más grandes posible y contrastando qué geometría se adaptaba mejor a la medida obtenida. Se cuenta que Gauss lo intentó tras inventar el heliotropo midiendo el triángulo formado por tres colinas próxi-

REFERENCIAS

1. J. Playfair, *Elements of Geometry*, Nueva York: W. E. Dean, 1846.
2. J. Montesinos Amilibia, «Las geometrías no euclídeas: Gauss, Lobachevski y Bolyai.» de *Historia de la Matemática en el siglo XIX* (1ª parte), Madrid, Real Academia de las Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid, 1991, pp. 65-114.
3. N. Lobachevski, «Acerca de los principios de la Geometría (en ruso),» Mensajero de Kazan, 1829.
4. J. Bolyai, *Scientiam Spatii absolute veram exhibens: a veritate aut falsitate Axiomatis XI. Euclidei (a priori haud unquam decidenda) independentem; adjecta ad casum falsitatis, quadratura circuli geometrica*, (apéndice al Tentamen de Farkas Bolyai), Maros Vásárhelyini, 1832.
5. E. Beltrami, «Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea,» *Gior. Mat.*, vol. 6, pp. 248-312, 1868.



mas a Gotinga¹⁷, y Lobachevski midiendo los ángulos de un triángulo con base el diámetro de la órbita terrestre y vértice en la estrella Sirio. En ambos casos, las medidas obtenidas fueron *aproximadamente* euclidianas, lo cual no permitió concluir nada. Aparte del error inherente a todo proceso de medida, en un universo hiperbólico (o esférico) las figuras pequeñas son muy similares a las euclidianas, casi indistinguibles, de modo que una medida aproximadamente euclidiana puede ser debida a que el mundo sea en realidad euclidiano o a que la figura medida no era lo suficientemente grande.

El problema de determinar qué geometría se adapta mejor a nuestro universo¹⁸ ya no es un problema matemático, sino cosmológico, y distintos experimentos (WMAP, BOOMERanG, Planck) están aportando datos que quizá permitan resolverlo. La teoría de la relatividad general afirma que la geometría en un punto del universo viene marcada por la fuerza de la gravedad

“Como nuestro pequeño científico dentro de su molécula de agua, los cosmólogos seguirán observando el cielo en busca de respuestas.”

en ese punto, es decir, por la distribución de materia. De este modo, la curvatura geométrica es equivalente al *parámetro de densidad* cosmológico. A gran escala, la distribución de materia observada en el universo es similar en todos los puntos y en todas las direcciones en que miremos, lo que se corresponde con un universo euclidiano (plano), esférico o hiperbólico. No hay evidencia de que alguna de las otras geometrías de Thurston (u otra distinta) se corresponda mejor con los datos observados. Desde los trabajos de Thurston, la geometría local (curvatura~densidad) está íntimamente ligada con la geometría global, con la forma que adopta del universo como un todo. Por ejemplo, si el universo fuera esférico no podría ser infinito y no podría seguir expandiéndose indefinidamente, pues todas las 3-variedades esféricas son compactas y por tanto finitas, pero incluso en los casos plano e hiperbólico el universo podría ser finito si adoptara la forma de una 3-variedad compacta. Las observaciones hasta ahora se corresponden con un universo aproximadamente plano lo que, como en el caso de Gauss y Lobachevski, nunca termina de ser del todo concluyente. En 2003 un equipo de científicos observó que los datos proporcionados por el experimento WMAP sobre la radiación de fondo de microondas cuadraban con un universo que adoptara la forma de la esfera homológica de Poincaré¹⁹, y esta hipótesis no está de momento descartada.

Como tantas otras veces, un objeto aparentemente inútil desarrollado por los matemáticos para satisfacer su simple curiosidad proporciona herramientas de utilidad en otros campos científicos. Como nuestro pequeño científico dentro de su molécula de agua, los cosmólogos seguirán observando el cielo en busca de respuestas. Nuevas observaciones harán aparecer nuevas hipótesis en el futuro y quizá otros ejemplos de 3-variedades u otras herramientas geométricas resulten de interés. Ajenos a todo esto, los topólogos de 3-variedades seguimos teniendo numerosos problemas aún por resolver, y muchos otros más por descubrir, que nos proporcionarán entretenimiento durante muchos años.*

6. H. Poincaré, «Théorie des groupes fuchsians,» Acta Math., vol. 1, pp. 1-62, 1882.
7. F. Klein, «Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie,» Math. Ann., vol. 4, pp. 573-625, 1871.
8. H. Poincaré, «Analysis Situs,» Jour. de l'Éc. Pol., vol. 2, nº 1, pp. 1-123, 1895.
9. H. Poincaré, «Cinquième complément à l'analysis situs,» Rend. Circ. Mat. Palermo, vol. 18, pp. 45-110, 1904.
10. M. Lozano Imízcoz, «La conjetura de Poincaré. Un problema de topología,» Arbor, vol. 178, nº 704, pp. 691-707, 2004.
11. C. Weber y H. Seifert, «Die beiden Dodekaederräume,» Math. Z., vol. 37, nº 1, p. 237-253, 1933.
12. W. P. Thurston, «Geometry and topology of three-manifolds (notas),» Princeton Univ., 1978.
13. W. Thurston, Three-dimensional geometry and topology, Princeton: Princeton University Press, 1997.
14. G. Perelman, «The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications,» <https://arxiv.org/abs/math/0211159>, 2002.
15. G. Perelman, «Ricci flow with surgery on three-manifolds,» <https://arxiv.org/abs/math/0303109>, 2003.
16. G. Perelman, «Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds,» <https://arxiv.org/abs/math/0307245>, 2003.
17. E. Scholz, «Carl F. Gauss, el "gran triángulo" y los fundamentos de la geometría (trad.),» La Gaceta de la RSME, vol. 8, nº 3, pp. 683-712, 2005.
18. J. Weeks, The Shape of Space, Nueva York: Marcel Dekker Inc., 2002.
19. J. P. Luminet, J. R. Weeks, A. Riazuelo, R. Lehoucq y J. P. Uzan, «Dodecahedral space topology as an explanation for weak wide-angle temperature correlations in the cosmic microwave background,» Nature, vol. 425, p. 593-595, 2003.

Rubén Vígara Benito
Dpto. de Matemáticas
Facultad de Educación
Universidad de Zaragoza

* Quisiera dedicarle este artículo al profesor José María Montesinos y agradecerle su ayuda y consejo durante la preparación del mismo. Todo lo que aquí figura forma parte de sus enseñanzas.

