MATEMÁTICAS Y MÚSICA

POR JOSÉ GARAY

"Para descubrir el origen de la relación entre ambas materias, le basta al lector con pulsar una cuerda de algún instrumento musical."

Fotografía por Víctor Sola.

Matemáticas y Música

Ante este título quizá algún lector se pregunte: ¿Qué relación puede existir entre estas dos actividades de aceptación popular tan distinta? Mientras que la Música agrada prácticamente a todo el mundo, eso sí, cada uno con sus gustos, las Matemáticas tienen fama de difíciles y resultan poco atractivas para un buen número de estudiantes.

Pues para descubrir el origen de la relación entre ambas materias, le basta al lector con pulsar una cuerda de algún instrumento musical. Observará que la cuerda se pone a vibrar y al mismo tiempo emite un sonido. Pues bien, el sonido es música y el número de veces que la cuerda oscila en un segundo pertenece a las matemáticas. Así empieza la conexión entre estos dos mundos, el musical y el matemático.

Pero demos nombre a las cosas. Al sonido los músicos lo nombran con una de las notas de la escala musical, y ese número que le asociamos lo llamamos su frecuencia. Si por ejemplo la cuerda que hemos pulsado es la más grave de un violín bien afinado, la nota es un Sol y su frecuencia es 196.

Pero claro, podemos pensar que un sonido no está enteramente caracterizado por su frecuencia ya que una misma nota puede ser producida por instrumentos distintos e incluso por la voz humana y nosotros somos capaces de distinguir de qué instrumento se trata e incluso de qué persona. La explicación es muy sencilla. Así como podemos distinguir diversos tipos de agua por su sabor, debido a las sales que cada uno contiene, también en los sonidos, además de la frecuencia fundamental están presentes en distintas proporciones otras frecuencias llamadas armónicos y que producen el timbre del sonido. Precisamente mediante sintetizadores podemos mezclar distintos armónicos en la proporción deseada para obtener sonidos que se aproximen lo más posible a un instrumento prefijado.

Uno de los primeros en estudiar este fenómenos de los armónicos fue el físico matemático Fourier (1768-1830), estableciendo, de paso, las bases de una de las ramas más importantes de las Matemáticas, el llamado Análisis Armónico. Y ahora surge una interesante cuestión. ¿Cómo percibimos las distintas frecuencias? Veámoslo escuchando esta sucesión de sonidos con frecuencias crecientes:

330, 440, 523, 660
http://apphech.com/hidden/sonido-1.mp3

Podemos observar con satisfacción que cuanto mayor es la frecuencia mayor es la agudeza del sonido. Y decimos con satisfacción porque este hecho nos permite asegurar que existe la Música. Efectivamente, la Música está formada por melodías y una melodía supone fundamentalmente fluctuaciones y variaciones en la agudeza y gravedad de los sonidos. Si oyésemos todas las frecuencias con la misma agudeza sería como ver todo en blanco y negro. La única música sería la originada por el ritmo.

Hagamos un pequeño paréntesis para comentar la forma de representar las melodías en forma escrita de manera que se puedan transmitir sin necesidad de dejar una grabación acústica. Nos limitaremos al caso más simple de que se trate de una melodía al unísono. Y resuelto este caso el caso polifónico es muy sencillo.

Puesto que una melodía está formada por una sucesión de sonidos podemos proceder en forma totalmente análoga a la escritura de nuestras conversaciones. Asignamos un símbolo a cada nota que forma la melodía y vamos escribiendo estos símbolos de izquierda a derecha en líneas sucesivas.

Por lo que precede parece que el símbolo más adecuado es el número correspondiente a la frecuencia de la nota. Pero, claro, esto es insuficiente, puesto que sabemos que no todas las notas tienen la misma duración e intensidad. En consecuencia, la sucesión de sonidos en la melodía estaría representada por una sucesión de ternas en cada una de las cuales se representasen frecuencia, duración e intensidad de la nota. Por ejemplo,

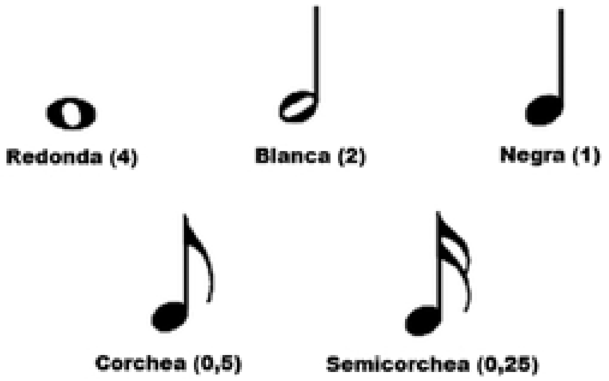
[660, 0.25, 2] [623, 0.25, 2] [660,0.25, 2]
[623, 0.25, 2] [660, 0.25, 2] [494, 0.25, 4]
[588, 0.25, 4] [523, 0.25, 4] [440, 0.5, 4]
[0, 0.25, 0] [262, 0.25, 2] [330, 0.25, 2]

podría representar el principio de una obra musical. Naturalmente la terna [0, 0.25, 0] correspondería a un silencio.

Pero imaginemos que a un pianista le presentan esta partitura para su interpretación. Teniendo en cuenta que un piano normal tiene 88 teclas, el intérprete debería memorizar con soltura ese número de frecuencias. Y además tendría que atender a los otros dos números de cada nota para ver su duración e intensidad. Seguro que ni el legendario Franz Liszt hubiese sido capaz de interpretar la obra.


http://omni-demo-805.com

Pues en este punto hemos de reconocer que las Matemáticas con sus números no dan la mejor solución al problema. Los músicos lo han resuelto ideando unos símbolos a los que llaman notas que informan de la duración del correspondiente sonido. Presentamos algunas con su nombre específico y duración:



Y para ver la frecuencia asociada a cada nota, colocan el correspondiente símbolo en un pentagrama de forma que a mayor altura en el pentagrama corresponde mayor frecuencia.

Así la sucesión anterior de ternas numéricas se convierte en el principio de la tan conocida obra beethoveniana *Para Elisa* (ver figura anexa).

Pero volvamos al tema de la relación entre la frecuencia de un sonido y la agudeza con la que lo percibimos. Antes hemos comprobado que a mayor frecuencia corresponde mayor agudeza. Pues bien, entre los muchos casos de pares de magnitudes que verifican esta relación de a mayor corresponde mayor hay algunos muy especiales en los que además se da el hecho de que a doble corresponde doble. Estos casos se llaman lineales y permiten utilizar la popular regla de tres.

Para ver si la relación entre frecuencia y agudeza de un sonido es lineal o no, vamos a escuchar la siguiente escalera musical. Es lo que se llama una escala cromática (ver figura anexa):

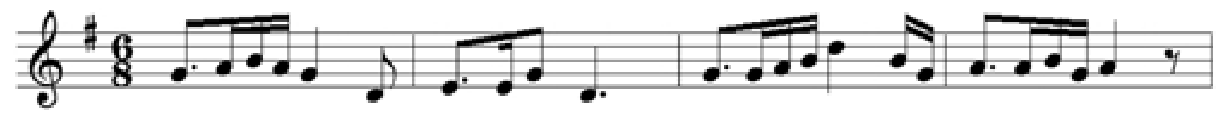
http://apphech.com/hidden/sonido-2.mp3

Nuestro oído percibe una escalera en la cual todos los peldaños tienen la misma altura. Es lo que llamamos en Matemáticas una progresión aritmética. Sin embargo, las frecuencias de estas notas, que escribimos a continuación, forman una progresión geométrica de razón igual a la raíz duodécima de 2, aproximadamente 1.06:

262, 277, 294, 311, 330, 349, 370, 392, 415, 440, 466, 494, 523.

Arriba: *Para Elisa*, Beethoven (1867).
Abajo: escalera musical (http://apphech.com/hidden/sonido-2.mp3).

Melodía (http://apphech.com/hidden/sonido-3.mp3).



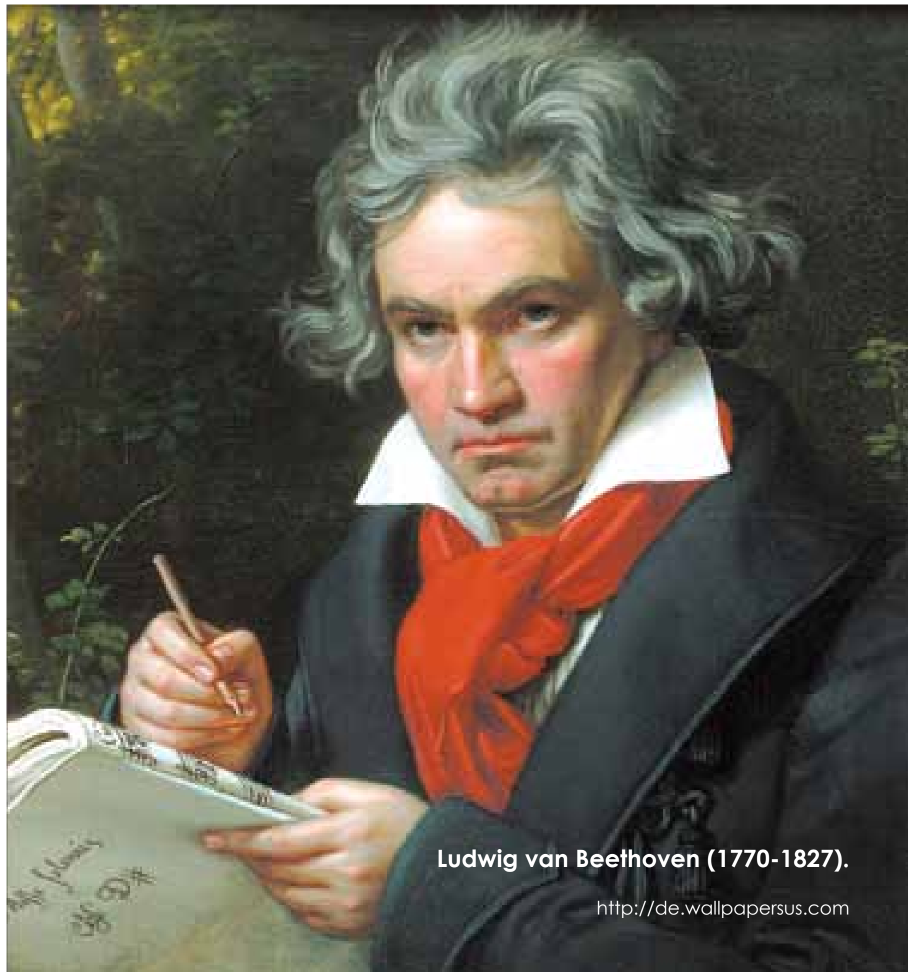
Esto nos dice simplemente que la relación entre frecuencia y sensación de agudeza no es lineal sino logarítmica. De hecho, el último peldaño en las frecuencias duplica prácticamente al primero. En otras palabras, los instrumentos musicales o la voz humana producen frecuencias y nosotros oímos sus logaritmos. La base de los logaritmos depende de la unidad que se elija para medir la sensación de agudeza, así como también de la forma para medir la frecuencia. Realmente este hecho es un caso particular de lo que ya en la Edad Media afirmó el sabio árabe Al Kindi (803?-873) cuando dijo que mientras la excitación crece en progresión geométrica la correspondiente sensación lo hace en aritmética.

Esta relación logarítmica tiene una interesante aplicación musical cuando modificamos una melodía cambiando su tonalidad. Esto supone que todas las notas son reemplazadas por otras de forma que la razón entre las frecuencias es igual a un número prefijado.

Al hacer esto, si nosotros oyésemos en forma proporcional a las frecuencias, esto supondría que, al menos que el factor fuese la unidad, la nueva melodía sería una modificación de la inicial. Sin embargo no es así, como luego comprobaremos con un sencillo ejemplo. La nueva melodía es la misma inicial trasladada superior o inferiormente según que el factor elegido sea mayor o menor que la unidad. Y esto ¿por qué? Sencillamente porque como nosotros oímos los logaritmos de las frecuencias sabemos que cuando las frecuencias se multiplican por un factor sus logaritmos se suman con el logaritmo del factor, y en consecuencia la nueva melodía es la misma inicial trasladada exactamente el logaritmo de dicho factor.

Un ejemplo. Supongamos que en la melodía (ver figura anexa):

http://apphech.com/hidden/sonido-3.mp3



Ludwig van Beethoven (1770-1827).
http://de.wallpapersus.com

multiplicamos todas las frecuencias por 1.5. La nueva melodía es (ver figura anexa):

http://apphech.com/hidden/sonido-4.mp3

En términos musicales se dice que hemos cambiado de Sol mayor (presencia del Fa sostenido en la primera versión de la melodía) a Re mayor (presencia de los sostenidos Fa y Do en la segunda versión).

Otro concepto matemático que guarda relación con el mundo musical es el de quebrado. En las composiciones polifónicas es normal la simultaneidad de varios sonidos. Y aunque cada sonido por separado es agradable para nuestro oído, la superposición de dos o más puede ocurrir que no lo sea tanto. Pues bien, en el caso de dos sonidos los quebrados nos dan la solución. Véamoslo con un ejemplo. Oigamos los tres acordes siguientes (ver figura anexa):

Re-La, Re-Sol y Mi-Fa.
http://apphech.com/hidden/sonido-5.mp3

Los dos primeros se llaman respectivamente intervalos de quinta y cuarta justa mientras que el tercero es una segunda menor. Ya sabemos que en cuestión de gustos las cosas son opinables, pero en este caso para la mayoría de los oyentes, las quinta y cuarta justas resultan más agradables de escuchar que la segunda menor. De hecho, este tercer acorde es realmente un tipo de disonancia. Y ¿qué tiene que ver esto con los quebrados? Pues si para acorde escribimos un quebrado formado por las frecuencias de sus notas y lo simplificamos obtenemos:

La/Re =3/2; Sol/Re = 4/3; Fa/Mi =16/15.

Vemos que los quebrados correspondientes a los acordes más agradables para la mayoría están formado por números (3,2) y (4,3) más pequeños que el de la disonancia (16,15). Pues esta, que podríamos llamar regla de la sencillez, es general. De hecho solo hay dos quebrados más sencillos que los anteriores que son 1/1 que corresponde al unísono y 2/1 que corresponde al par formado por una nota y su octava. Por

http://originis.myblog.it

Arriba: melodía (http://apphech.com/hidden/sonido-4.mp3).
Abajo: Re-La, Re-Sol y Mi-Fa (http://apphech.com/hidden/sonido-5.mp3).

cierto, también las disonancias son a veces utilizadas por los compositores para crear una cierta tensión que luego se resuelve con un acorde más agradable.

Terminamos esta revisión de conceptos matemáticos relacionados con la música con un último que suele asociarse con la Geometría, el concepto de simetría. Pero no es necesariamente geométrico este concepto, también puede ser temporal. Si elegimos un instante como origen, una sucesión de sucesos será simétrico respecto de este instante cuando dos sucesos equidistantes del origen elegido, uno anterior y otro posterior, coincidan. En el caso de una melodía musical ha habido grandes compositores que han compuesto piezas simétricas, de forma que igual da tocarlas de izquierda a derecha o en sentido contrario. Es lo que se llama movimientos retrógados o cancrizantes. Incluso Mozart tiene un scherzo duetto para dos violines de manera que uno de ellos empieza por la derecha de la partitura y el otro por la izquierda.

A continuación, presentamos al lector, para que se entretenga, una pieza A que es la simétrica temporal de otra muy conocida B, invitándole a que adivine B escuchando A:

A: http://apphech.com/hidden/sonido-6.mp3
B: http://apphech.com/hidden/sonido-7.mp3

“En el caso de una melodía musical, ha habido grandes compositores que han compuesto piezas simétricas, de forma que igual da tocarlas de izquierda a derecha o en sentido contrario.”

Naturalmente, no presentamos las correspondientes partituras para no dar ventaja a los conocedores de la escritura musical.

Hasta aquí hemos hablado de algunos hechos matemáticos que hay dentro de la Música. Pues si el amable lector me lo permite, terminaré este escrito refiriéndome brevemente a algunos aspectos musicales, que quien esto escribe ha asociado a algunos conceptos matemáticos. Concretamente, música asociada a sucesiones de cifras. Si de alguna manera hacemos corresponder a cada cifra una nota musical, cada sucesión de cifras se transforma en una melodía y si memorizamos la melodía podemos escribir inmediatamente la sucesión numérica que la originó. Esta idea tan sencilla permitió al autor de estas líneas memorizar en su época de estudiante varios números importantes y, entre ellos, muchos logaritmos con 21 cifras decimales que había que utilizar en la asignatura de Astronomía.

http://www.theartscentregc.com.au

Las 34 cifras de π comprendidas entre los lugares 886 y 919 (http://apphech.com/hidden/sonido-8.mp3).

Presentamos, para terminar, un par de composiciones de esta, llamemos, música numérica. La primera corresponde a aquella ya lejana época a la que me he referido y la segunda es más moderna y de cierta actualidad. La primera es una breve partitura extraída de otra más amplia compuesta con las mil primeras cifras del número π. En la sección que exponemos, a continuación, solamente aparecen las 34 cifras de π comprendidas entre los lugares 886 y 919 (ver figura anexa):

http://apphech.com/hidden/sonido-8.mp3

La segunda y última composición numérica que presento la compuse con motivo de la aparición del euro. Mi amigo y colega J.L. Arregui me hizo ver que entre el número áureo y el número de pesetas que hay en un céntimo de euro hay una diferencia de solo centésimas. Este hecho permite afirmar que, en la conocida sucesión de Fibonacci, dos términos consecutivos son prácticamente equivalentes en sentido monetario cuando el primero se exprese en céntimos de euro y el segundo en pesetas. Pensé que esta propiedad privilegiada de nuestra vieja peseta se merecía una composición musical, utilizando mi antigua técnica.

Por analogía llamé *número éureo* al que pasa de céntimos de euro a pesetas con lo cual tenemos los dos números :

α = número áureo = 1.61803....
ε = número éureo = 1.66386

Y aquí me encontré con una grave dificultad. El número α tiene infinitas cifras por ser irracional y me permite componer toda la música que quiera, pero el ε solo tiene cinco cifras decimales significativas, con lo cual mi composición solo se compondría a lo sumo de seis notas. El problema lo solventé pasando ambos números a base 5, con lo cual α no pierde su irracionalidad y, por lo tanto, continúa con infinitos decimales, mientras que ε pasa a ser periódico mixto, con un período de 4 cifras.

El resultado es la siguiente composición en la que se representa un diálogo y danza entre las dos monedas, peseta y euro, donde la peseta, como moneda vieja, es representada por los violonchelos y el recién nacido euro es interpretado por los violines (ver figura anexa):

http://apphech.com/hidden/sonido-9.mp3

José Garay

Miembro del Senatus Científico
Dpto. de Matemáticas
Facultad de Ciencias
Universidad de Zaragoza

Composición (http://apphech.com/hidden/sonido-9.mp3).